

# Modelação microscópica e macroscópica para o tráfego de veículos

Mário Rui Santana da Rocha Ferreira

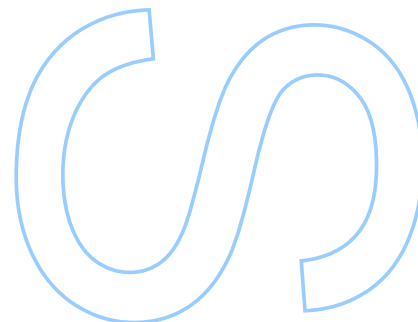
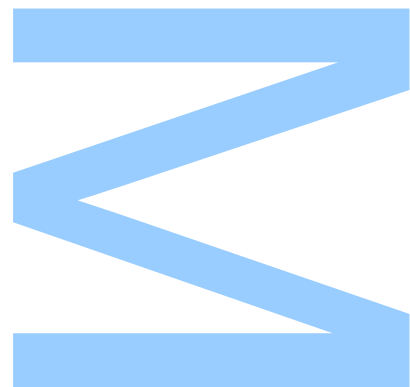
2.º Ciclo

Departamento de Matemática

2019

## **Orientador**

Sílvio Marques de Almeida Gama, Professor Associado , FCUP

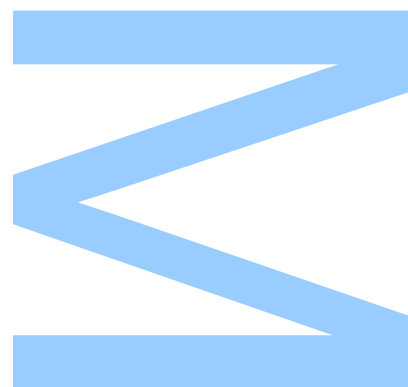




Todas as correções determinadas  
pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_



# Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Sílvio Marques de Almeida Gama, pela paciência, disponibilidade e apoio ao longo de todo o ano.

Também gostaria de agradecer aos amigos, não podendo enumerá-los a todos, agradeço aos amigos da secundária de Penafiel, aos amigos de Penafiel, aos amigos do Porto e aos amigos da Faculdade. Sem eles o apoio de cada um deles, não seria possível terminar este trabalho.

Por último, mas não menos importante, quero agradecer o apoio da minha família, em especial à minha mãe, que tudo fez para que eu conseguisse realizar todo o meu percurso académico.



# Resumo

Neste trabalho, dedicado à dinâmica de tráfego de veículos, estudam-se os principais modelos de duas das abordagens presentes na literatura. Uma das abordagens é referentes a modelos microscópicos, onde o tráfego é tido como um conjunto de pontos discretos. A segunda abordagem trata de modelos macroscópicos. Esta última tem em conta uma visão mais geral do tráfego, passando este a ser considerado como uma espécie de fluido que circula num sentido.

Estudam-se os modelos microscópicos e são feitos comentários quanto às suas diferenças, possíveis vantagens e desvantagens entre os modelos. Seguem-se os modelos macroscópicos, assim como as leis de conservação inerentes associadas à dinâmica do tráfego.

Posteriormente, são feitas algumas simulações numéricas dos modelos de tipo *car following*, presentes na abordagem microscópica, de forma a ser possível observar alguns critérios de estabilidade dos modelos e comentam-se outras características observadas.



# Abstract

This work, devoted to the dynamics of traffic flows, studies the main models nowadays available in the literature. One of these models is the microscopic model, where the traffic is regarded as a set of discrete points governed by ordinary differential equations. The second model is based on macroscopic approach, where the traffic flow is considered as a fluid.

Studies are done on microscopic models and their differences are described, as well as their possible advantages and disadvantages. The same kind of study is done for the macroscopic models.

Numerical simulations are presented for the *car following* models (microscopic approach). It is analysed some stability criteria and other characteristics about the models.





# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelos microscópicos</b>	<b>3</b>
2.1	Modelos sem tempo de reação . . . . .	3
2.1.1	Modelo de Chandler, Herman e Montroll (CHM) . . . . .	4
2.1.2	Modelo OVM . . . . .	4
2.1.3	Modelo GFM . . . . .	4
2.1.4	Modelo FVDM . . . . .	5
2.1.5	Modelo COVM . . . . .	5
2.2	Modelos com tempo de reação . . . . .	6
2.2.1	Modelo de Chandler . . . . .	6
2.2.2	Modelo de Herman-Potts (HP) . . . . .	7
2.2.3	Modelo de Edie . . . . .	7
2.2.4	Modelo GM . . . . .	7
2.3	Estabilidade em modelos sem tempo de reação . . . . .	8
2.4	Estabilidade em modelos com tempo de reação . . . . .	11
2.4.1	Resultados aproximados . . . . .	12
2.4.2	Resultados exactos . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Principais elementos do tráfego de veículos</b>	<b>17</b>
3.1	Principais variáveis . . . . .	17
3.2	Diagrama fundamental do tráfego . . . . .	18
3.2.1	Relação fluxo versus densidade . . . . .	18
3.2.2	Relação velocidade versus densidade . . . . .	18
3.3	Modelos velocidade versus densidade . . . . .	19
3.3.1	Modelo de Greenshields . . . . .	19
3.3.2	Modelo de Greenberg . . . . .	19
3.3.3	Modelo de Underwood . . . . .	20
3.3.4	Modelo de Pipes . . . . .	21
3.3.5	Modelo de Drake . . . . .	22

<b>4</b>	<b>Leis de conservação</b>	<b>23</b>
4.1	Conservação do número de veículos . . . . .	23
4.1.1	Conservação do número de veículos numa via unidimensional . . . .	23
4.1.2	Conservação do número de veículos numa via bi-dimensional . . . .	24
4.2	Conservação do momento linear . . . . .	26
4.2.1	Conservação do momento linear numa via unidimensional . . . . .	26
4.2.2	Conservação do momemnto linear numa via bi-dimensional . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Modelos macroscópicos</b>	<b>29</b>
5.1	Modelo de Lighthill-Whitham-Richards (LWR) . . . . .	29
5.2	Modelo de Payne-Whitham (PW) . . . . .	31
5.3	Modelo de Zhang . . . . .	33
5.4	Modelo de Aw-Rascle (AR) . . . . .	34
5.5	Modelo transição de fases (2 flux model) . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Relação do modelo GM com funções de velocidade versus densidade</b>	<b>39</b>
6.1	Modelo de Greenshields . . . . .	39
6.2	Modelo de Greenberg . . . . .	40
6.3	Modelo de Underwood . . . . .	41
6.4	Derivação de outros modelos . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Simulações e Resultados</b>	<b>45</b>
7.1	Modelo GM . . . . .	46
7.2	Modelo OVM . . . . .	50
<b>8</b>	<b>Conclusão. Trabalho futuro.</b>	<b>57</b>
8.1	Considerações finais . . . . .	57
8.2	Trabalho futuro . . . . .	58
	<b>Apêndices</b>	<b>65</b>

# Lista de Tabelas

7.1	Perturbação é dada em m/s e $ v_o - v_{16} $ é o módulo da diferença entre a velocidade inicial ( $v_o$ ) e a velocidade no tempo $t = 1000$ s do 16º veículo ( $v_{16}$ ). . . . .	49
-----	---	----

# Lista de Figuras

2.1	Curvas num referencial em coordenadas polares do par $(V'_1, \alpha_k)$ .	11
2.2	Gráfico da 1ª equação do sistema (2.33): linha preta. Gráficos da 2ª equação do sistema (2.33) para $a\tau = 5, \frac{\pi}{2}, 1, 0.01$ : linhas vermelha, verde, azul e roxa, respetivamente.	15
3.1	Modelo de Greenshields.	19
3.2	Modelo de Greenberg.	20
3.3	Modelo de Underwood.	21
3.4	Modelo de Pipes para $n = 2$ .	21
3.5	Modelo de Drake.	22
7.1	Velocidade dos 32 veículos durante os primeiros 400 segundos para a constante de sensibilidade $a = 0.4\text{s}^{-1}$ .	46
7.2	Velocidade dos 32 veículos durante os primeiros 400 segundos para a constante de sensibilidade $a = 0.6\text{s}^{-1}$ .	47
7.3	Velocidade do veículo $n = 1$ nos primeiros 1000 segundos para valores de $\tau = 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}$ representada pela linha magenta, verde, vermelho e azul, respetivamente.	48
7.4	Velocidade do veículo $n = 16$ nos primeiros 1000 segundos para velocidades iniciais 24, 26 e 28 m/s representada pela linha azul, vermelha e verde, respetivamente.	49
7.5	Velocidade do veículo $n = 16$ nos primeiros 1000 segundos para perturbações na velocidade inicial 1.5, 2, 2.5, 3 e 3.5 m/s representada pela linha vermelha, azul, verde, amarela e magenta, respetivamente.	49
7.6	Posição do veículo $n = 1$ nos primeiros 400 segundos, o caso estável e instável são descritos pelas linhas azul e vermelha, respetivamente.	51
7.7	Velocidade do veículo $n = 1$ nos primeiros 1000 segundos. Os casos estável e instável são descritos pelas linhas azul e vermelha, respetivamente.	52
7.8	Velocidades dos veículos $n = 1$ até $n = 12$ para o caso instável.	52

7.9	Posição dos 32 veículos nos primeiros 100 segundos para o caso estável. . .	53
7.10	Velocidade dos 32 veículos nos primeiros 100 segundos para o caso estável.	53
7.11	Posição dos 32 veículos nos primeiros 200 segundos, para uma velocidade inicial nula. . . . .	54
7.12	Posição dos 32 veículos nos primeiros 200 segundos, para uma velocidade inicial nula, simulado com função (7.8) e $v_f = 32$ m/s. . . . .	55



# Capítulo 1

## Introdução

Um dos obstáculos no estudo do tráfego de veículos é a sua complexidade. Por um lado envolve tomadas de decisão humanas, por outro está restrito a leis físicas quanto ao tempo, espaço e movimento. Nesse sentido foram desenvolvidos modelos para explicar o fenómeno que atendem às características referidas.

Das diferentes abordagens na literatura este trabalho foca-se em duas.

A primeira trata-se de modelos microscópicos, onde o tráfego é tido como um conjunto de pontos discretos. Estes são designados de *car following*, ou seja, os veículos seguem apenas numa via em que não são permitidas ultrapassagens. A dinâmica dos modelos consiste na reação do condutor a certos estímulos a que é exposto, os mesmos são provocados pelo veículo que circula à sua frente. Para o estudo usam-se métricas como a posição no tempo, as suas derivadas e a distância entre dois veículos consecutivos.

A segunda abordagem considerada são os modelos macroscópicos, nesta o tráfego é visto como um fluido contínuo circulando numa direção. Aqui as medidas consideradas para o estudo são o fluxo ( $f$ ), densidade ( $k$ ) e velocidade ( $v$ ).

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No segundo capítulo apresentam-se modelos microscópicos de *car following* divididos pelos que consideram uma reação instantânea do condutor e os que introduzem um tempo de reação (ou tempo de atraso). De seguida é feita uma análise da estabilidade dos dois tipos de modelos de forma a ser possível concluir quais as funções ou parâmetros que melhor modelam o trânsito nos modelos analisados.

No terceiro capítulo introduz-se o conceito de diagrama fundamental do tráfego, onde

se relaciona o fluxo com a densidade. Também se expõem algumas relações da velocidade com a densidade, estas são fundamentais para ser possível expressar o fluxo como função da densidade.

No capítulo seguinte, como já referido anteriormente, têm-se em conta as propriedades físicas inerentes ao problema e são então derivadas leis de conservação do tráfego quanto à massa (número de veículos) e momento.

No quinto capítulo são expostos os modelos macroscópicos definidos a partir das equações de conservação apresentadas no quarto capítulo.

No sexto capítulo mostra-se a ligação entre os modelos de *car following* e as funções que relacionam a velocidade com densidade vistas no terceiro capítulo.

No capítulo seguinte fazem-se simulações numéricas para alguns modelos de *car following* e tecem-se alguns comentários sobre os modelos e estabelecem-se comparações entre eles.

Termina-se com as conclusões e trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## Modelos microscópicos

Neste capítulo, o tráfego é visto como um conjunto de pontos discretos. Os modelos para este tipo de assunção podem considerar várias vias de circulação e ultrapassagens entre veículos. Dos que serão estudados neste trabalho é assumido que só existe uma via, impossibilitando a possibilidade de haver ultrapassagens. Este tipo de modelo é designado por *car following* e considera a seguinte dinâmica:

$$Resposta = Sensibilidade \times Estimulo,$$

onde a sensibilidade varia de condutor para condutor, podendo esta ser traduzida pelos parâmetros ou funções das dinâmicas propostas. O estímulo de um condutor é dado pela informação do veículo à sua frente (seja a posição ou a velocidade). A resposta, de um modo geral, é traduzida pela aceleração do veículo.

Em ordem a ser possível apresentar os modelos, é necessário definir algumas notações:

1.  $x_n(t)$  – posição do  $n$ -ésimo veículo no instante de tempo  $t$ ;
2.  $v_n(t)$  – velocidade do  $n$ -ésimo veículo no instante de tempo  $t$ ;
3.  $a_n(t)$  – aceleração do  $n$ -ésimo veículo no instante de tempo  $t$ ;
4.  $\Delta x_n(t)$  – diferença da posição entre o veículo  $n + 1$  e  $n$  no instante de tempo  $t$ ;
5.  $\Delta v_n(t)$  – diferença da velocidade entre o veículo  $n + 1$  e  $n$  no instante de tempo  $t$ ;
6.  $\Delta a_n(t)$  – diferença da aceleração entre o veículo  $n + 1$  e  $n$  no instante de tempo  $t$ ;

### 2.1 Modelos sem tempo de reação

Os modelos de *car following* começaram a ser propostos na década de cinquenta do século passado. De entre todos os modelos que surgiram desde essa altura, neste trabalho serão

apresentados os que são mais referidos na literatura (Jiang *et al.* (2001)[1], Zhao *et al.* (2005) [2], Jun-Fung *et al.* (2011) [3], Zhang *et al.* (2017) [4]).

### 2.1.1 Modelo de Chandler, Herman e Montroll (CHM)

O primeiro modelo de *car following* deve-se a Chandler, Herman e Montroll (1958) [5] e é formulado da seguinte forma (Chung (2005)[6]):

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \Delta v_n(t), \quad (2.1)$$

Neste modelo, o  $n$ -ésimo veículo ajusta a sua velocidade (instantaneamente) apenas considerando a diferença de velocidades para o carro imediatamente à sua frente, sendo  $\tau$  uma constante real positiva que representa o tempo de reação do condutor. Tipicamente,  $\tau \in [1; 2]$  segundos (Winifred (1966) [7]))

Este modelo apresenta defeitos para a simulação de tráfego, pois tem em conta somente a diferença de velocidades entre dois veículos consecutivos independentemente da velocidade a que circulam e a distância a que se encontram.

### 2.1.2 Modelo OVM

Bando *et al.* (1995) [8] propuseram um modelo de velocidade ótima (*optimal velocity model*), OVM, definido da forma:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a [V_1(\Delta x_n(t)) - v_n(t)], \quad (2.2)$$

onde  $a$  é uma constante real positiva (normalmente entre  $[0.3, 1] \text{ s}^{-1}$ ) e a função  $V_1(\cdot)$  determina a velocidade ideal/ótima que o veículo deve tomar, tendo em conta a distância,  $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ , do veículo que se encontra imediatamente à sua frente. Por outras palavras, este modelo considera que o condutor tem em conta apenas a diferença de posições para ajustar a sua velocidade, eliminado assim a desvantagem do modelo anterior.

### 2.1.3 Modelo GFM

Heilbing e Tilch (1998) [9], graças ao estudo e análise de dados de tráfegos, enriqueceram o modelo OVM, propondo o chamado modelo GFM (generalized force model) definido por:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a [V_1(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda \Theta(-\Delta v_n(t)) \Delta v_n(t), \quad (2.3)$$

onde a função  $\Theta(\cdot)$  é a função Heaviside (vale 0, quando o seu argumento é negativo ou igual a zero; 1, caso contrário) e  $\lambda$  é uma constante real positiva normalmente entre  $[0.1, 0.5] \text{ s}^{-1}$ .

#### 2.1.4 Modelo FVDM

Jiang *et al.* (2001) [1] propõem uma alteração no modelo GFM, designado por modelo FVDM (full velocity difference model) descrito pela seguinte dinâmica:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a [V_1(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda \Delta v_n(t), \quad (2.4)$$

onde  $\lambda$  é definido por:

$$\begin{cases} b, & \Delta x_n(t) \leq d_s \\ c, & \Delta x_n(t) > d_s \end{cases}$$

sendo  $b$ ,  $c$  e  $d_s$  constantes reais positivas. Na literatura, estas constantes tipicamente são  $b = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $c = 0 \text{ s}^{-1}$  e  $d_s = 100 \text{ m}$  (Zhao *et al.* (2005) [2]).

Neste modelo, a função Heaviside presente em (2.3) é substituída por uma função definida por ramos, conferindo assim uma sensibilidade diferente aos condutores.

#### 2.1.5 Modelo COVM

Jun-Fang *et al.* (2011) [3] propõem o modelo COVM (comprehensive optimal velocity model), onde é considerada uma função de dois argumentos, diferença de posições ( $\Delta x_n(t)$ ) e diferença de velocidades ( $\Delta v_n(t)$ ), para determinar a velocidade ideal que o condutor deve adaptar:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a [V(\Delta x_n(t), \Delta v_n(t)) - v_n]. \quad (2.5)$$

Por simplicidade, a função  $V(\cdot)$  é tida como uma combinação de duas funções  $V_1(\cdot)$  e  $V_2(\cdot)$ :

$$V(\Delta x_n, \Delta v_n) = V_1(\Delta x_n(t)) + \alpha V_2(\Delta v_n(t)), \quad (2.6)$$

onde  $0 < \alpha < 1$ .

Tendo em conta o  $V(\cdot)$  da forma descrita, o modelo COVM pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a [V_1(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda V_2(\Delta v_n(t)), \quad (2.7)$$

onde  $\lambda = a\alpha$ .

Notar que, a partir deste modelo, pode-se obter o modelo OVM tomando  $V_2(\Delta v_n(t)) = 0$ . O mesmo se verifica para os modelos GFM e FVDM considerando  $V_2(\cdot)$ .

## 2.2 Modelos com tempo de reação

A assunção que cada condutor altera o seu estado com base na informação que está à sua frente parece estar de acordo com a experiência humana. Porém, também é universal que o ser humano não toma uma decisão no mesmo instante em que observa.

Tendo em conta a ultima observação, começaram a ser propostos modelos onde é tido em conta esse tempo de reação.

### 2.2.1 Modelo de Chandler

Considerando que a reação de cada condutor não é instantânea, Chandler *et al.* (1958) [5] propõem o seguinte modelo:

$$\frac{dv_n(t + \tau)}{dt} = a_n \Delta v_n(t). \quad (2.8)$$

O modelo GM diferencia-se do modelo GHM (2.1), pois considera que o condutor apenas altera a sua velocidade tendo em conta a diferença de velocidades após  $\tau$  segundos. Sendo que nem todos os condutores reagem de igual forma, também é introduzido o

parâmetro  $\lambda_n$ , que pode ser interpretado como a sensibilidade do condutor  $n$ , tipicamente,  $\lambda_n \in [0.3, 1] \text{ s}^{-1}$ .

### 2.2.2 Modelo de Herman-Potts (HP)

Herman e Potts (1959) [10] propõem um modelo não linear que têm em conta a distância entre os veículos:

$$\frac{dv_n(t + \tau)}{dt} = a \frac{\Delta v_n(t)}{\Delta x_n(t)}. \quad (2.9)$$

Tal como o modelo de Chandler, este não têm em conta a magnitude da velocidade, podendo assim prever a mesma aceleração tanto no caso de os veículos circulam a velocidades baixas ou altas.

### 2.2.3 Modelo de Edie

Edie *et al.* (1961) [11] propõem a seguinte alteração ao modelo HP:

$$\frac{dv_n(t + \tau)}{dt} = a v_n(t) \frac{\Delta v_n(t)}{\Delta x_n^2(t)}. \quad (2.10)$$

O modelo já consegue diferenciar cenários em que as velocidades são grandes ou pequenas devido à introdução do termo da velocidade ( $v_n(t)$ ).

### 2.2.4 Modelo GM

Segundo Winifred (1966) [7] na sequência dos modelos anteriores, Gazis, Herman e Rothery (1961) [12] apresentam um modelo generalizado:

$$\frac{dv_n(t + \tau)}{dt} = a \frac{[v_n(t + \tau)]^m}{[\Delta x_n(t)]^l} \Delta v_n(t), \quad (2.11)$$

onde  $a, m, l$  são constantes reais positivas.

De notar que o termo da velocidade é tido como a velocidade no instante em que a velocidade vai ser adaptada, além disso, os modelos com tempo de reação anteriormente apresentados podem ser obtidos a partir do GM.

Apesar das melhorias introduzidas (componente da reação incluída), note-se que qualquer um dos modelos com atraso para uma diferença de velocidades nula prevê uma aceleração

nula que, como foi visto anteriormente, nem sempre é a aceleração esperada num caso real.

## 2.3 Estabilidade em modelos sem tempo de reação

No tráfego existem inúmeros fenómenos originados a partir de pequenas perturbações que são ampliadas ao longo do tempo. De seguida, são estabelecidas algumas condições de estabilidade para perturbações introduzidas nos modelos.

Para esta análise linear de estabilidade, o modelo considerado é o OVM (2.2), relembrando o seu aspeto:

$$\ddot{x}_n(t) = a [V_1(\Delta x_n(t)) - \dot{x}_n(t)] , \quad (2.12)$$

onde  $\dot{x}_n(t) = v_n(t)$ .

A solução estável do modelo, ou seja, uma solução que resulta numa aceleração nula, é a seguinte. Para cada veículo  $n$ ,  $\Delta x_n(t) = \Delta x_0$  e  $\Delta v_n(t) = 0$ , ou seja, todos os veículos circulam à mesma distância do veículo da frente e circulam com igual velocidade ( $V_1$ ) sendo que a mesma é definida pela função de velocidade ótima  $V_1 = V_1(\Delta x_0)$ .

A solução estável é dada da seguinte forma:

$$x_n^{(o)}(t) = \Delta x_0 n + V_1 t . \quad (2.13)$$

Considerando uma estrada circular de comprimento  $L$  e  $N$  veículos, então estes são equidistante mente distribuídos ao longo da via, sendo  $\Delta x_0 = L/N$  a distância entre dois veículos consecutivos.

Adicione-se a esta solução estacionária a perturbação  $y_n(t)$ . A solução perturbada escreve-se:

A solução perturbada escreve-se:

$$x_n(t) = x_n^{(o)}(t) + \varepsilon y_n(t) , \quad (2.14)$$

onde  $\varepsilon$  é um pequeno parâmetro positivo que controla a amplitude da perturbação.

Substituindo (2.14) na equação do modelo (2.2), obtém-se:

$$\ddot{x}_n^0(t) + \varepsilon \ddot{y}_n(t) = a [ V_1(\Delta x_n^{(0)}(t) + \varepsilon \Delta y_n(t)) - (\dot{x}_n^{(0)}(t) - \varepsilon \dot{y}_n(t)) ] .$$

Expandindo em torno de  $\varepsilon \Delta y_n(t)$ , obtêm-se:

$$\ddot{x}_n^0(t) + \varepsilon \ddot{y}_n(t) = a \left[ V_1 \left( \Delta x_n^{(0)}(t) \right) + \frac{dV_1(\Delta x)}{d\Delta x} \Big|_{\Delta x = \Delta x_0} \varepsilon \Delta y_n(t) + O \left( (\varepsilon \Delta y_n(t))^2 \right) - \left( \dot{x}_n^{(0)}(t) + \varepsilon \dot{y}_n(t) \right) \right] \quad (2.15)$$

Como  $x_n^{(0)}(t)$  é solução de (2.2), então a condição:

$$\ddot{x}_n^{(0)}(t) = a [ V_1 \left( \Delta x_n^{(0)}(t) \right) - \dot{x}_n^{(0)}(t) ] ,$$

é verificada e (2.15) reescreve-se:

$$\varepsilon \ddot{y}_n(t) = a \left[ \frac{V_1(\Delta x)}{d\Delta x} \Big|_{\Delta x = \Delta x_0} \varepsilon \Delta y_n(t) + O((\varepsilon \Delta y_n(t))^2) + \varepsilon \dot{y}_n(t) \right] .$$

Como se pretende fazer uma análise de estabilidade linear, desprezam-se os termos de ordem superior a um, obtendo-se a seguinte equação:

$$\ddot{y}_n(t) = a [ V_1' \Delta y_n(t) - \dot{y}_n(t) ] , \quad (2.16)$$

onde  $V_1' = \frac{dV_1(\Delta x)}{d\Delta x} \Big|_{\Delta x = \Delta x_0}$ .

Considere-se, agora, a perturbação como uma combinação linear da família de funções ortogonais:

$$y_k(n, t) = \exp(i\alpha_k n + zt) , \quad (2.17)$$

onde  $\alpha_k = \frac{2\pi}{N}k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) e  $z$  um número complexo da forma  $\alpha + i\beta$  (com  $\alpha$  e  $\beta$  reais).

Substituindo (2.17) em (2.16), obtêm-se:

$$z^2 + az - aV_1' (\exp(i\alpha_k) - 1) = 0 , \quad (2.18)$$

Para cada  $\alpha_k$  e  $V_1'$ , tem-se duas soluções para a expressão (2.18).

Sendo  $y_n(t)$  escrito por uma combinação linear de  $y_k(n, t)$ , observa-se que existem três possibilidades para o termo  $\alpha$  que definem o comportamento de cada uma das funções  $y_k(n, t)$ :

1. Quando  $\alpha < 0$ , a perturbação dissipa-se, ou seja:  
 $(t \rightarrow +\infty) \longrightarrow (|y_k(n, t)| \rightarrow 0)$
2. Para  $\alpha > 0$ , a perturbação desestabiliza a solução inicial, ou seja:  
 $(t \rightarrow +\infty) \longrightarrow (|y_k(n, t)| \rightarrow +\infty)$
3. No caso de  $\alpha = 0$ , a perturbação mantém-se na solução inicial, ou seja:  
 $(t \rightarrow +\infty) \longrightarrow (|y_k(n, t)| \rightarrow 1)$

Em ordem a ser possível determinar a condição de fronteira no qual a solução dissipa-se ou desestabiliza-se, substitui-se  $\alpha = 0$  em (2.18), separando-se a componente real da imaginária da equação, obtendo-se as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} -\beta^2 + aV_1'(1 - \cos(\alpha_k)) = 0 \\ a\beta - aV_1'\sin(\alpha_k) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

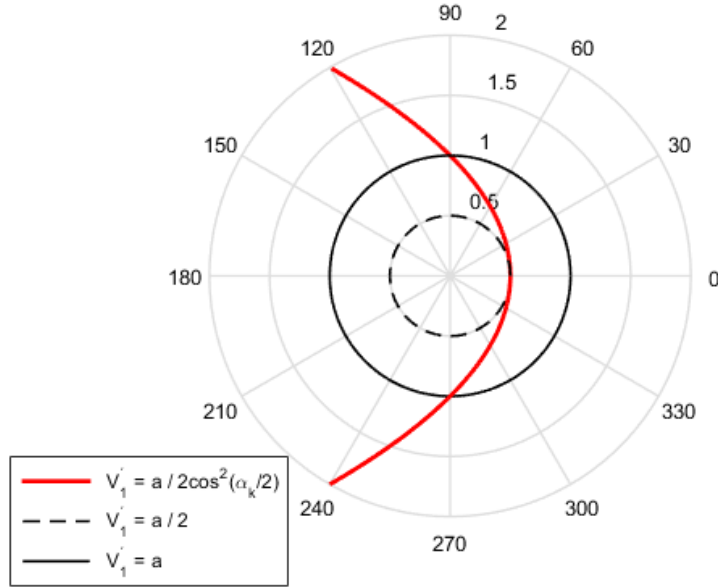
que resolvidas em ordem a  $V_1'$  e  $\beta$ , dão:

$$\begin{cases} V_1' = \frac{a}{2\cos^2(\frac{\alpha_k}{2})} \\ \beta = V_1'\sin(\alpha_k) \end{cases} \quad (2.20)$$

Sendo a primeira equação de (2.20) uma condição de fronteira para o sinal de  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha = 0$ , observando a Figura (2.1) é possível definir uma região de estabilidade do modelo, isto é, uma região onde  $\alpha < 0$  implicando uma dissipação da perturbação.

Observa-se em Figura (2.1) que a curva para  $V_1' = \frac{a}{2}$  é tangente à curva definida pela condição de fronteira e portanto para  $V_1' < \frac{a}{2}$  tem-se uma curva dentro da região de estabilidade implicando um  $\alpha < 0$ . Assim, torna-se possível estabelecer condições de estabilidade para o modelo OVM dependentes de  $V_1'$ , estas passam a ser consideradas na seleção da função  $V_1(\cdot)$ .





**Figura 2.1:** Curvas num referencial em coordenadas polares do par  $(V'_1, \alpha_k)$ .

Condições de estabilidade para o modelo OVM:

1.  $V'_1 < \frac{a}{2} \implies \forall u < 0$ , ou seja:  
A perturbação dissipa-se do tráfego.
2.  $V'_1 = \frac{a}{2} \implies \forall u \leq 0$ , ou seja:  
A perturbação mantém-se no tráfego.
3.  $V'_1 > \frac{a}{2} \implies \exists u > 0$ , ou seja:  
A perturbação desestabiliza o tráfego.

## 2.4 Estabilidade em modelos com tempo de reação

Um fator de instabilidade no tráfego é o tempo de reação de cada condutor. Com a introdução desse fator nos modelos, os mesmos passaram a ser mais sensíveis a perturbações, tendo como consequência a existência de novas condições de estabilidade.

O estudo da estabilidade é feito para o modelo GM (2.11), onde  $m, l$  são ambas constantes nulas, sendo também equivalente ao modelo RP (2.1) com a introdução do tempo de reação ( $\tau$ ):

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a \Delta v_n(t - \tau). \quad (2.21)$$

### 2.4.1 Resultados aproximados

Desenvolvendo  $\Delta x_n(t - \tau)$  em série de Taylor para  $\tau = 0$  e conservando apenas os termos até à segunda ordem, da equação anterior obtêm-se:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a \left[ \frac{d\Delta x_n(t)}{dt} - \tau \frac{d^2 \Delta x_n(t)}{dt^2} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^3 \Delta x_n(t)}{dt^3} \right]. \quad (2.22)$$

Colocando os termos respeitantes ao veículo  $n + 1$  no lado direito da equação, os termos respeitantes ao veículo  $n$  no lado esquerdo da equação e escrevendo  $v_n(t) = \dot{x}_n(t)$ , a equação ganha o aspeto da seguinte equação diferencial linear de segunda ordem:

$$\frac{a\tau^2}{2} \ddot{x}_n(t) + (1 - a\tau) \ddot{x}_n(t) + a\dot{x}_n(t) = \frac{a\tau^2}{2} \ddot{x}_{n+1}(t) - a\tau \ddot{x}_{n+1}(t) + a\dot{x}_{n+1}(t). \quad (2.23)$$

Têm-se então a velocidade do veículo  $n$  em termos do veículo  $n + 1$ . Sendo (2.23) uma equação diferencial linear de segunda ordem para o veículo  $n$ , esta têm uma solução composta por solução particular e uma combinação linear de exponenciais, sendo que para a solução particular usa-se o lado esquerdo da equação. De forma a ser possível determinar essa combinação linear considera-se a equação homogénea associada. Considerando as soluções da forma  $\exp(zt)$ , onde  $z$  é complexo, substituindo em (2.23), obtêm-se a seguinte quadrática:

$$z^2 \left( \frac{a\tau^2}{2} \right) + z(1 - a\tau) + a = 0, \quad (2.24)$$

cujas as raízes são dadas por:

$$z = \frac{a\tau - 1 \pm \sqrt{(1 - a\tau)^2 - 2(a\tau)^2}}{a\tau^2}.$$

A solução é não oscilatória para  $z$  real, pois a parte imaginária de  $z$ , componente que provoca a oscilação da solução, é nula. Assim, se o binómio discriminante for maior ou igual a zero implica  $z$  real, o que acontece na condição:

$$a\tau \leq \sqrt{2} - 1 \approx 0.414.$$

Se a condição acima não for verificada, o comportamento da solução depende então do sinal de  $a\tau - 1$ . Este termo determina o sinal da componente real de  $z$ :

1.  $0 \leq a\tau < \sqrt{2} - 1$ , a solução é não oscilatória com amortecimento, pois a componente real de  $z$  é menor que zero.
2.  $\sqrt{2} - 1 \leq a\tau < 1$ , a solução é oscilatória com amortecimento, pois  $a\tau - 1 < 0$ , implicando uma componente real de  $z$  é menor que zero.
3.  $a\tau \geq 1$ , a solução é oscilatória com aumento da amplitude, pois  $a\tau - 1 \geq 0$ , implicando uma componente real de  $z$  maior que zero.

#### 2.4.2 Resultados exactos

Os resultados anteriores são aproximados. Herman *et al.* (1969) [10] apresentam resultados exatos usando transformadas de Laplace.

Seja a transformada de Laplace da função  $f(\cdot)$  é definida por:

$$f^*(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt. \quad (2.25)$$

Sabe-se que:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = pf^*(p) - f(0) \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = \int_0^\infty f(t - \tau) \exp(-pt) dt = \exp(-p\tau) \int_{-\tau}^\infty f(t) \exp(-pt) dt. \quad (2.27)$$

Supondo  $\dot{x}_n(t) = 0$  no intervalo  $t \in [-\tau; 0]$  têm-se:

$$\mathcal{L}[\dot{x}_n(t - \tau)] = \exp(-p\tau) \int_0^\infty \dot{x}_n(t) \exp(-pt) dt.$$

Usando (2.26) e (2.27), conclui-se:

$$\mathcal{L}[\dot{x}_n(t - \tau)] = \exp(-p\tau) \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] .$$

Substituindo, no modelo GM (2.21), obtêm-se a seguinte equação:

$$p\dot{x}_n^*(p) - \dot{x}_n(0) = a \exp(-p\tau) [\dot{x}_{n+1}^*(p) - \dot{x}_n^*(p)] ,$$

de onde se deduz:

$$\dot{x}_n^*(p) = \frac{\dot{x}_n^*(0) + a\dot{x}_{n+1}^*(p) \exp(-p\tau)}{p + a \exp(-p\tau)} . \quad (2.28)$$

O comportamento das soluções obtidas depende dos zeros do denominador da equação acima:

$$p + a \exp(-p\tau) = 0 . \quad (2.29)$$

Considerando  $p\tau = \alpha + i\beta$  e separando a parte real da parte imaginária da equação, obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + a\tau \exp(-\alpha) \cos(\beta) = 0 \\ \beta - a\tau \exp(-\alpha) \sin(\beta) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Herman *et al* (1959) [10] mostram que, para um  $t$  suficientemente grande, o comportamento das soluções é influenciado apenas pelo pólo com maior parte real.

Resolvendo a segunda equação em (2.30) em ordem a  $a\tau$ , têm-se:

$$\begin{cases} \alpha + a\tau \exp(-\alpha) \cos(\beta) = 0 \\ a\tau = \frac{\beta}{\exp(-\alpha) \sin(\beta)} \end{cases} \quad (2.31)$$

sendo que para tal se supôs que  $\sin(\beta) \neq 0$ . Caso contrário, pela segunda equação de (2.30) têm-se  $\beta = 0$  e pela primeira equação conclui-se:

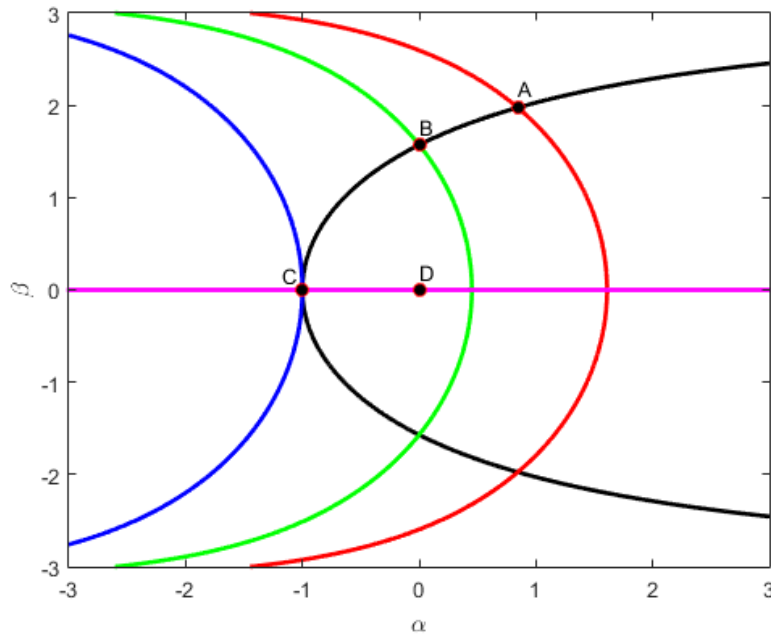
$$\alpha = -a\tau \exp(-\alpha) < 0 . \quad (2.32)$$

Assim para  $\sin(\beta) = 0$  têm-se soluções com  $\alpha < 0$ , resultando em perturbações não oscilatórias ( $\beta = 0$ ) com amplitude amortecida ( $\alpha < 0$ ). Voltando ao sistema e substituindo

na primeira equação o termo  $a\tau$ , o sistema pode ser escrito da forma:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \cot(\beta) = 0 \\ \beta - a\tau \exp(-\alpha) \sin(\beta) = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Note-se que a primeira equação não depende explicitamente de  $a\tau$ , podendo assim ver-se o efeito da alteração da constante na solução do sistema. Para tal, observa-se no plano  $(\alpha, \beta)$  as duas curvas para valores diferentes de  $a\tau$  (Figura 2.2).



**Figura 2.2:** Gráfico da 1ª equação do sistema (2.33): linha preta. Gráficos da 2ª equação do sistema (2.33) para  $a\tau = 5, \frac{\pi}{2}, 1, 0.01$ : linhas vermelha, verde, azul e roxa, respetivamente.

Em todos os quatro casos de  $a\tau$  presentes na Figura 2.2 existem outras interseções das curvas do sistema (2.33), porém essas interseções possuem parte real negativa e sendo assim uma componente da perturbação que se dissipará.

Torna-se então possível estudar o comportamento das soluções, analisando o valor do pólo com maior parte real assinalado na Figura 2.2 para cada  $a\tau$ .

Designado esse pólo como  $s_o = \alpha_o + i\beta_o$ , as conclusões retiradas a partir do gráfico (Figura 2.2) podem ser resumidas da seguinte forma:

1.  $a\tau \leq \frac{1}{e}$  e  $s_o$  encontra-se entre os pontos C e D.

Traduz uma solução não oscilatória ( $\beta_o = 0$ ) com amortecimento ( $\alpha_o \leq 0$ ).

2.  $\frac{1}{e} < a\tau < \frac{\pi}{2}$  e  $s_o$  encontra-se entre os pontos B e C.

Trata-se de uma solução oscilatória ( $\beta_o > 0$ ) com amortecimento ( $\alpha_o < 0$ ).

3.  $a\tau = \frac{\pi}{2}$  e  $s_o$  é o ponto B.

Resulta numa solução oscilatória ( $\beta_o > 0$ ) com amplitude constante ( $\alpha_o = 0$ ).

4.  $a\tau > \frac{\pi}{2}$  e  $s_o$  encontra-se entre os pontos A e B.

Significa uma solução oscilatória ( $\beta_o > 0$ ) com aumento de amplitude ( $\alpha_o > 0$ ).

# Capítulo 3

## Principais elementos do tráfego de veículos

Neste capítulo, será feito o estudo de modelos dirigidos para uma visão mais geral do comportamento do tráfego. Este deixa de ser considerado um conjunto de pontos discretos e é tido como um fluido.

### 3.1 Principais variáveis

As principais variáveis macroscópicas no estudo de um problema de tráfego são o fluxo, a densidade e a velocidade. Supondo que estas quantidades são constantes no espaço e no tempo, elas são definidas por:

1. fluxo,  $f$ : denota o número de veículos que passa, num dado ponto, por unidade de tempo;
2. densidade ou concentração,  $k$ : é número de veículos por unidade de comprimento;
3. velocidade,  $v$ : distância percorrida por unidade de tempo;

Aqui, assumimos o espaço unidimensional. Por análise dimensional, mostra-se que:

$$f = k \, v . \tag{3.1}$$

No caso de  $f$ ,  $k$  e  $v$  dependerem da posição,  $x$ , e do tempo,  $t$  a igualdade anterior transforma-se em:

$$f(x, t) = k(x, t) \, v(x, t) , \tag{3.2}$$

onde, se necessário,  $x$  pode ter dimensão espacial superior a um.

## 3.2 Diagrama fundamental do tráfego

Em ordem a ser possível analisar a influência da densidade no fluxo do tráfego, considera-se a hipótese da velocidade depender apenas da densidade, implicando que também o fluxo o seja,  $f = k v(k)$ .

### 3.2.1 Relação fluxo versus densidade

A representação gráfica da relação entre densidade e fluxo é designada por diagrama fundamental do tráfego. A partir de (3.2) e considerando as propriedades propostas por Lighthill *et al.* (1955) [13] resultam as seguintes condições para a relação ser viável:

1. Para uma densidade próxima de zero, também se têm um fluxo próximo de zero ( $k \rightarrow 0 \implies f \rightarrow 0$ ).
2. Existe um valor máximo da densidade ( $k_c$ ) para o qual o fluxo se aproxima de zero ( $k \rightarrow k_c \implies f \rightarrow 0$ ).
3. O fluxo tem pelo menos um máximo ( $f_{max}$ ) para um valor da densidade ( $\hat{k}$ ) pertencente a  $[0, k_c]$ .

A constante  $f_{max}$  é designada como capacidade da via.

### 3.2.2 Relação velocidade versus densidade

Uma relação da velocidade com a densidade de forma a poder ser utilizada para o estudo deve satisfazer as seguintes características também propostas por Lighthill:

1. Quando a densidade de veículos se aproxima de zero, a velocidade é a maior possível ( $k \rightarrow 0 \implies v \rightarrow v_f$ ).
2. Qualquer aumento da densidade diminuirá a velocidade

$$\frac{dv}{dk} \leq 0. \quad (3.3)$$

3. Para uma densidade máxima ( $k_c$ ), a velocidade é nula

$$v(k_c) = 0. \quad (3.4)$$



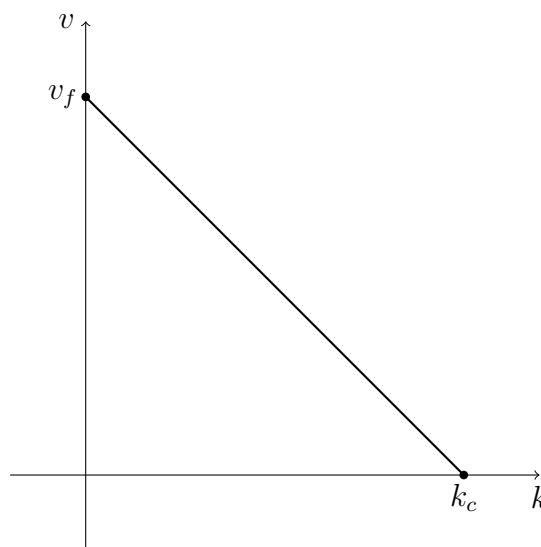
### 3.3 Modelos velocidade versus densidade

#### 3.3.1 Modelo de Greenshields

Segundo Taylor *et al.* (2008) [14] um dos primeiros modelos a ser proposto foi por Greenshields em 1935, dado pela seguinte relação linear:

$$v = v_f \left( 1 - \frac{k}{k_c} \right). \quad (3.5)$$

Sendo  $v_f$  a velocidade de fluxo livre, ou seja, a velocidade a que os veículos circulam sem trânsito e  $k_c$  a concentração tal que a velocidade é nula, como exigido por Lighthill *et al* [13].



**Figura 3.1:** Modelo de Greenshields.

#### 3.3.2 Modelo de Greenberg

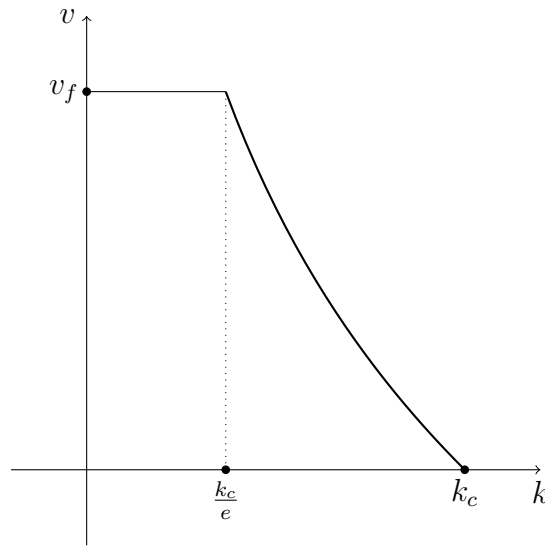
Greenberg (1959) [15] propôs o seguinte modelo logarítmico:

$$v = v_f \ln \left( \frac{k_c}{k} \right). \quad (3.6)$$

Note-se que a velocidade não fica definida para uma concentração nula. Ainda assim, quando a concentração tende para zero, também o fluxo tende para zero como é exigível.

Também é possível definir a função por ramos de modo a esta estar definida para todas as concentrações:

$$\begin{cases} v_f & k \leq \frac{k_c}{e} \\ v_f \ln\left(\frac{k_c}{k}\right) & k > \frac{k_c}{e} \end{cases} \quad (3.7)$$



**Figura 3.2:** Modelo de Greenberg.

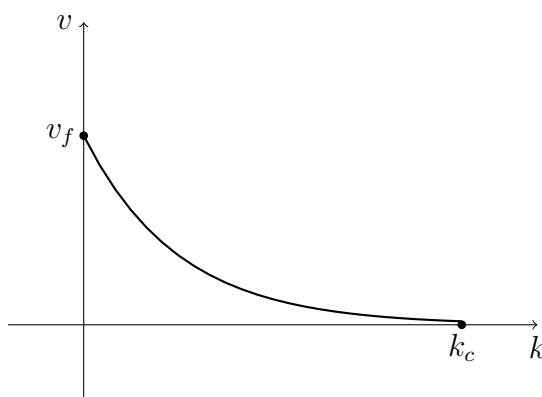
### 3.3.3 Modelo de Underwood

Underwood (1961) apresentou um modelo exponencial:

$$v = v_f \exp\left(-\frac{k}{\hat{k}}\right), \quad (3.8)$$

onde  $\hat{k}$  é a concentração tal que o fluxo é máximo ( $f_{max}$ ).

O modelo possui a desvantagem de conter o parâmetro desconhecido  $\hat{k}$ , o qual é mais difícil de estimar do que as constantes usadas nos modelos anteriores.



**Figura 3.3:** Modelo de Underwood.

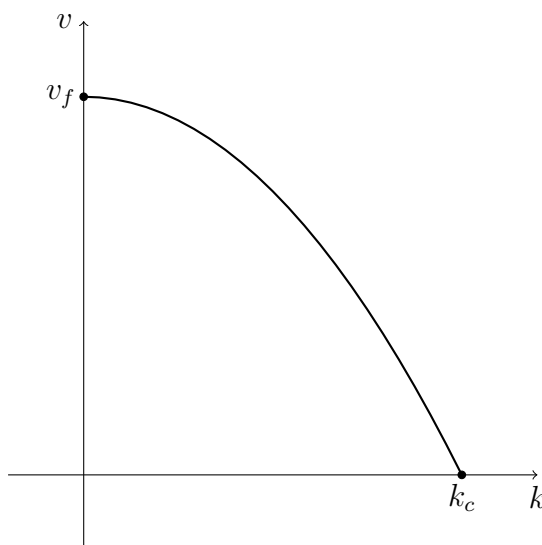
### 3.3.4 Modelo de Pipes

Pipes *et al.* (1966) [16] apresenta uma família de modelos:

$$v = v_f \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_c} \right)^n \right], \quad (3.9)$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ .

Note-se que para  $n = 1$ , trata-se do modelo de Greenshields.



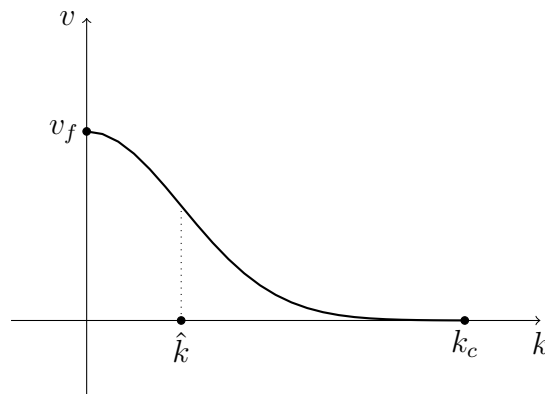
**Figura 3.4:** Modelo de Pipes para  $n = 2$ .

### 3.3.5 Modelo de Drake

Drake *et al.* (1966) [17] propõem um modelo semelhante a Underwood:

$$v = v_f \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{k}{\hat{k}} \right)^2 \right]. \quad (3.10)$$

Este modelo apresenta uma concavidade voltada para baixo, quando  $k < \hat{k}$ , e voltada para cima, no caso contrário, sugerindo, assim, um ponto de inflexão em  $\hat{k}$  onde a velocidade diminui com o aumento da concentração, mas menos acentuadamente.



**Figura 3.5:** Modelo de Drake

# Capítulo 4

## Leis de conservação

Este capítulo é dedicado às leis de conservação do fluxo de tráfego. À semelhança da mecânica dos fluidos, estas leis de conservação assumem um aspeto semelhante, onde, basicamente, um veículo equivale a uma partícula de fluido. Por exemplo, numa secção de uma via de trânsito, a variação, no tempo, do número de veículos nessa secção é igual ao número de veículos que nela entram menos o número de que dela saem.

### 4.1 Conservação do número de veículos

#### 4.1.1 Conservação do número de veículos numa via unidimensional

Considere-se uma secção de uma via unidimensional compreendida entre  $[x_1, x_2]$  e que o número de veículos nessa mesma via, no instante  $t$ , é dado por  $N(t)$ .

Sendo o fluxo o número de veículos por unidade de tempo, tem-se que a diferença entre os fluxos nas posição  $x_1$  e  $x_2$  no tempo  $t$  (ou seja, a diferença entre o número de veículos que entram com os que saem na via) é igual á variação de  $N$  no tempo  $t$ :

$$\frac{dN}{dt}(t) = f(x_1, t) - f(x_2, t). \quad (4.1)$$

Tendo em conta que a densidade é o número de veículos por unidade de distância, integrando a concentração em ordem à distância, entre  $x_1$  e  $x_2$ , obtêm-se o total dos veículos nessa secção descrita pela equação:

$$N(t) = \int_{x_1}^{x_2} k(x, t) dx. \quad (4.2)$$

Considerando, (4.1) e (4.2), resulta na lei do integral da conservação:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} k(x, t) dx = f(x_1, t) - f(x_2, t). \quad (4.3)$$

Como as leis de conservação são verificadas em todos os sub intervalos possíveis, toma-se  $x_1$  e  $x_2$  como sendo variáveis. Assim, (4.3) rescreve-se como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} k(x, t) dx = f(x_1, t) - f(x_2, t). \quad (4.4)$$

Ou seja, (4.4) pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} k(x, t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dx, \quad (4.5)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} k(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right] dx = 0. \quad (4.6)$$

Sendo  $x_1$  e  $x_2$  arbitrários, de (4.6) conclui-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} k(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = 0. \quad (4.7)$$

Por simplicidade de notação, rescreve-se (4.7) da seguinte forma:

$$k_t(x, t) + f_x(x, t) = 0, \quad (4.8)$$

onde o índice representa a variável em ordem à qual se deriva a função.

#### 4.1.2 Conservação do número de veículos numa via bi-dimensional

Considere-se uma secção de uma via bi-dimensional compreendida no retângulo  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  e que o número de veículos nesse retângulo, no tempo  $t$ , é dado por  $N(t)$ .

Considere-se um veículo com posição  $(x, y) \in [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ , no retângulo, supondo que a saída se efetua através da fronteira  $x = x_2$  e  $y = y_2$  e que a entrada é através de  $x = x_1$  e  $y = y_1$ .

Têm-se que a diferença do fluxo através dos segmentos acima referidos dá a diferença entre o número de veículos que entram e que saem do retângulo:

$$\frac{dN}{dt}(t) = \int_{y_1}^{y_2} [f_1(x_1, y, t) - f_1(x_2, y, t)] dy + \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x, y_1, t) - f_2(x, y_2, t)] dx. \quad (4.9)$$

Integrando a concentração sobre o retângulo, obtém-se o número total de carros nessa secção:

$$N(t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} k(x, y, t) dy dx. \quad (4.10)$$

Considerando (4.9) e (4.10), obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} k(x, y, t) dy dx = \int_{y_1}^{y_2} [f_1(x_1, y, t) - f_1(x_2, y, t)] dy + \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x, y_1, t) - f_2(x, y_2, t)] dx. \quad (4.11)$$

Reescrevendo o lado direito num só integral (4.11) e considerando  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$  como variáveis, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} k(x, y, t) dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y, t) \right] dy dx, \quad (4.12)$$

ou seja:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial t} k(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y, t) dy dx = 0. \quad (4.13)$$

Notando que o integral é zero, qualquer que seja o retângulo contido em  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ , então a função integrada têm que ser a função nula, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial t} k(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y, t) = 0, \quad (4.14)$$

$$k_t(x, y, t) + \nabla \cdot f(x, y, t) = 0. \quad (4.15)$$

Para o caso  $x \in \mathbb{R}^n$ , sendo o fluxo e a velocidade funções com  $n$  componentes e considerando, a lei de conservação do número de veículos é dada por:

$$k_t(x, t) + \nabla \cdot f(x, t) = 0. \quad (4.16)$$

## 4.2 Conservação do momento linear

Sendo o tráfego de veículos um problema com componentes físicas, tal como o número de veículos, também o momento linear é conservado.

### 4.2.1 Conservação do momento linear numa via unidimensional

Considere-se uma secção de uma via unidimensional compreendida entre  $[x_1, x_2]$  e que, em qualquer ponto do espaço,  $x$ , e instante de tempo,  $t$ , existe uma pressão ou força, no sentido do movimento dos veículos, representada por  $p(x, t)$ .

À semelhança da dinâmica dos fluídos, o momento ( $\rho$ ) do tráfego é dado pelo produto da sua concentração ( $k$ ) pela a sua velocidade ( $v$ ), isto é,  $\rho = k v$ , e o fluxo do momento é dado pelo produto do momento com a velocidade ( $k v^2$ ). De acordo com a segunda lei de Newton, a derivada do momento em ordem ao tempo é igual à resultante das forças aplicadas ( $F_{total} = \frac{d\rho}{dt}$ ), onde  $\rho$  é o momento.

Assim, considerando que a resultante das forças na secção entre  $x_1$  e  $x_2$  no instante  $t$  é a diferença da pressão e do fluxo do momento, a força total é dada por:

$$F_{total}(t) = [p(x_1, t) - p(x_2, t)] + [k(x_1, t) (v(x_1, t))^2 - k(x_2, t) (v(x_2, t))^2], \quad (4.17)$$

sendo a variação do momento em ordem ao tempo em toda a secção igual a:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} [k(x, t) v(x, t)] dx. \quad (4.18)$$



Aplicando a segunda lei de Newton, omitindo os argumentos das funções e escrevendo o lado direito de (4.17) na forma de integral, têm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} [kv] dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [p + kv^2] dx. \quad (4.19)$$

Usando uma argumentação semelhante à usada para a conservação de veículos, obtêm-se:

$$f_t + (fv + p)_x = 0, \quad (4.20)$$

#### 4.2.2 Conservação do momemnto linear numa via bi-dimensional

Considere-se o retângulo  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  e sejam  $v_1(x, y, t)$  a velocidade no ponto  $(x, y)$  na direção  $x$  e  $v_2(x, y, t)$  a velocidade na direção  $y$ .

Para a coordenada  $x$  define-se momento como o produto da concentração pela velocidade ( $kv_1$ ) e o fluxo do momento como produto do momento com a velocidade, obtendo-se assim um fluxo do momento para a  $x$ ,  $(kv_1v_1)$ , e para  $y$ ,  $(kv_1v_2)$ .

O total da pressão no segmento de reta  $x = x_1$  onde  $y \in [y_1, y_2]$  é dado por:

$$\int_{y_1}^{y_2} p(x_1, y, t) dy, \quad (4.21)$$

o mesmo se aplica para o fluxo do momento no segmento de reta  $x_1$  onde  $y \in [y_1, y_2]$  :

$$\int_{y_1}^{y_2} [k(x_1, y, t) (v_1(x_1, y, t))^2] dy, \quad (4.22)$$

para o total de fluxo do momento na coordenada  $y$  na reta  $y_1$  têm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} k(x, y_1, t) v_1(x, y_1, t) v_2(x, y_1, t) dx. \quad (4.23)$$

Omitindo os argumentos das funções envolvidas, têm-se que o total da força na direção  $x$  é dado por:

$$F_{total}(t) = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (kv_1^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (kv_1v_2) \right] dy dx. \quad (4.24)$$

Para o total do momento na secção considerada tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial t} [kv_1] dy dx. \quad (4.25)$$

Usando a segunda lei de Newton têm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (kv_1) + \frac{\partial}{\partial x} (kv_1^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (kv_1v_2) \right] dydx = 0. \quad (4.26)$$

Usando o mesmo argumento para uma dimensão a equação anterior resulta:

$$(kv_1)_t + (kv_1^2 + p)_x + (kv_1v_2)_y = 0. \quad (4.27)$$

Analogamente se conclui que para a coordenada  $y$  a lei de conservação se escreve:

$$(kv_2)_t + (kv_2^2 + p)_y + (kv_2v_1)_x = 0. \quad (4.28)$$

Assim, a lei de conservação do momento para duas coordenadas traduz-se em duas equações que ainda podem ser escritas da forma:

$$\begin{cases} (f_1)_t + (f_1v_1 + p)_x + (f_1v_2)_y = 0 \\ (f_2)_t + (f_2v_2 + p)_y + (f_2v_1)_x = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

onde  $f_1 = kv_1$  e  $f_2 = kv_2$ .

# Capítulo 5

## Modelos macroscópicos

Uma característica diz-se anisotrópica se uma substância possuir uma propriedade física que varia consoante a direção. Para estes modelos, como é considerada apenas a reação de cada condutor tendo em conta o que está à sua frente, dizemos que o modelo está munido de uma característica anisotrópica, pois o que se passa atrás não influencia o comportamento do mesmo condutor. Nesta secção procura-se ter em conta se os modelos propostos possuem essa característica.

Em todas as abordagens que serão vistas tem-se a lei da conservação de massa como premissa:

$$k_t(x, t) + f_x(x, t) = 0, \quad (5.1)$$

suplementada com uma condição inicial ( $k(x, 0) = k_0(x)$ ) e ainda uma condição de fronteira ( $f(0, t) = f_0(t)$ ). Dadas estas condições, torna-se possível avaliar o estado do tráfego para toda a posição  $x$  e tempo  $t$ , através dos seguintes modelos.

### 5.1 Modelo de Lighthill-Whitham-Richards (LWR)

A assunção feita pelos autores Lighthill e Whitham (1955) [13] é a que o fluxo é função da densidade.

Richards (1956) [18] considera o modelo de Greenshields (3.5) para a função do fluxo em relação à concentração. Assim, a equação diferencial parcial (EDP) é a seguinte:

$$\begin{cases} k_t + (v(k) k)_x = 0 \\ k(x, 0) = k_0(x) \\ f(0, t) = f_0(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

onde  $x = 0$  é o ponto inicial da via,  $k_0(x)$  é a distribuição inicial da densidade e  $f_0(t)$  é o fluxo à entrada da via.

Lighthill e Whitham (1955) [13] definem a velocidade de onda ( $V_o$ ) como sendo a velocidade com que a informação da alteração do fluxo é transmitida ao longo da corrente de veículos, sendo esta definida da seguinte forma:

$$V_o = \frac{\Delta f}{\Delta k}, \quad (5.3)$$

onde  $\Delta f$  e  $\Delta k$  são respetivamente as alterações de fluxo e concentração para um pequeno intervalo de tempo.

Se o fluxo for considerado função da concentração, (5.3) pode ser escrito como:

$$v_o = \frac{df}{dk}. \quad (5.4)$$

Notando que (5.2) contém o termo  $(v(k)k)_k = \frac{dv}{dk}$  e portanto a velocidade de onda. Derivando obtêm-se:

$$v(k) + \frac{dv}{dk}k. \quad (5.5)$$

Note-se que em (5.5) a velocidade de onda é sempre menor que  $v(k)$ , a velocidade dos veículos, pois  $\frac{dv}{dk} < 0$ , condição anteriormente imposta (3.3).

Algumas conclusões sobre a velocidade de onda podem ser retiradas através da expressão (5.5):

1. Quando a densidade é nula a velocidade de onda é igual à máxima permitida ( $v_f$ ) e à dos veículos ( $v(k)$ ).
2. A velocidade de onda é sempre inferior à velocidade dos veículos para qualquer escolha de modelo fluxo vs densidade, excepto para uma densidade nula.

Tendo em conta a ultima conclusão, é possível afirmar que as ondas são sempre transmitidas na direção contrária ao movimento dos veículos, pois a sua velocidade é sempre menor que a dos veículos. Assim, os condutores ajustam a sua velocidade de acordo com a informação do que está à sua frente. Conferindo assim uma característica anisotrópica ao modelo.

## 5.2 Modelo de Payne-Whitham (PW)

Payne (1971) [19] acrescentou ao modelo LWR a equação da conservação do momento linear (4.20). O modelo PW é um sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} k_t + (kv)_x = 0 \\ f_t + \left( \frac{f^2}{k} + p(k) \right)_x = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

neste modelo a pressão é considerada uma função da concentração, por simplicidade omitem-se as condições iniciais e de fronteira.

Whitham (1974) [20] tendo em conta a necessidade de introduzir a aceleração na equação propôs a seguinte equação para o sistema:

$$v_t + vv_x + \frac{c_o^2}{k} k_x = \frac{v_*(k) - v}{\tau}, \quad (5.7)$$

onde  $c_o^2 = \frac{dp}{dk}$ ,  $c_o > 0$ ,  $\tau$  é uma constante de relaxamento e  $v_*(k)$  função da velocidade em função da concentração em equilíbrio, ou seja, sem aceleração.

Pode-se mostrar que esta equação é equivalente à da conservação do momento linear. Para tal, adiciona-se um termo nulo, pela condição de conservação de massa, no membro esquerdo de (5.7), obtendo-se:

$$v_t + vv_x + \frac{c_o^2}{k} k_x + \frac{v}{k} (k_t + f_x) = \frac{v_*(k) - v}{\tau}. \quad (5.8)$$

Multiplicando todos os termos por  $k$ :

$$kv_t + kvv_x + c_o^2 k_x + vk_t + vf_x = \frac{k(v_*(k) - v)}{\tau}. \quad (5.9)$$

Derivando  $f_x$ , notando que  $f = kv$  e agrupando os termos têm-se:

$$(kv_t + vk_t) + (2kvv_x + v^2 k_x) + c_o^2 k_x = \frac{f_*(k) - f}{\tau}. \quad (5.10)$$

Como  $c_o^2 = \frac{dp}{dk}$ , considerando a regra da derivação da função composta e do produto, obtêm-se:

$$(f)_t + (fv + p(k))_x = \frac{f_*(k) - f}{\tau}. \quad (5.11)$$

Repare-se que em equilíbrio, ou seja, sem aceleração têm-se  $f_*(k) = f$ . Assim o membro direito de (5.11) é nulo, obtendo-se a equação igual à da conservação do momento linear adicionada por Whitham[20].

O modelo PW pode então ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} k_t + (kv)_x = 0 \\ v_t + vv_x + \frac{c_o^2}{k} k_x = \frac{v_*(k) - v}{\tau} \end{cases} \quad (5.12)$$

podendo o sistema ser escrito na forma matricial:

$$u_t + g_x(u) = s(u), \quad (5.13)$$

onde  $u = (k, v)$  e  $g(k, v) = (kv, \frac{v^2}{2} + c_o^2 \ln(k))$ .

Em 1988 Schochet [21] mostra que, para  $\tau \rightarrow 0$ , o sistema admite como limite:

$$k_t + (kv)_x = vk_{xx}, \quad (5.14)$$

ou seja, o modelo LWR com um termo de viscosidade ( $vk_{xx}$ ).

O sistema homogéneo associado a (5.13), pode ser escrito da forma:

$$u_t + Au_x = 0, \quad (5.15)$$

sendo que a matriz  $A$  é o jacobiano de  $g(u)$  definida da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v & k \\ \frac{c_o^2}{k} & v \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

A matriz têm os seguintes valores próprios:

$$\lambda_{1,2} = v \mp c_o. \quad (5.17)$$

Como  $v \geq 0$  e  $c_o > 0$ , então  $\lambda_1 < \lambda_2$ , além disso, como  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e distintos, logo a matriz  $A$  é diagonalizável implicando que o modelo PW é um sistema hiperbólico.

Notando que qualquer EDP da forma:

$$g_t + a g_x = 0, \quad (5.18)$$

com a condição inicial  $g(x, 0) = g_0(x)$ , tem como solução  $g(x, t) = g_0(x - at)$ , onde  $a$  pode ser vista como a velocidade de propagação de informação ou de onda, tal como no modelo LWR, também o modelo PW, por ser um sistema hiperbólico, tem uma solução que pode ser escrita como combinação linear dos valores próprios  $\lambda_{1,2}$  e as respetivas funções  $u_0(x - \lambda_{1,2} t)$ , resultando assim em duas velocidades de propagação de informação.

De referir que  $\lambda_2$  é sempre superior a  $v$  implicando que o tráfego pode ser afetado por informação do que se passa atrás, pois a velocidade de propagação é superior à dos veículos. Assim, o modelo PW não possui uma característica anisotrópica.

### 5.3 Modelo de Zhang

Em 1998, Zhang [22] apresenta uma modificação ao modelo PW, assim a equação de conservação do momento linear tem o seguinte aspeto:

$$v_t + v v_x + c(k) v_x = 0, \quad (5.19)$$

em que é definida como  $c(k) = k v'_*(k)$  e  $v'_*(k)$  é a derivada da função da velocidade, em equilíbrio, em relação à concentração.

Considerando o sistema com a equação da conservação de veículos e escrevendo na forma matricial têm-se:

$$u_t + g_x(u) = 0. \quad (5.20)$$

onde  $u = (k, v)$ .

Tomando o jacobiano da função  $g(u)$  como a matriz  $A$  (5.20) fica:

$$u_t + Au_x = 0, \quad (5.21)$$

onde  $A$  é da forma:

$$\begin{bmatrix} v & k \\ 0 & v + c(k) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Assim os valores próprios de  $A$  são  $\lambda_1 = v + c(k)$  e  $\lambda_2 = v$ , como  $c(k) < 0$  pois  $c(k) = k v'_*(k) < 0$  (3.3), então, verifica-se que as características do sistema são menores ou iguais a  $v$ , assim as velocidades de onda nunca são superior à velocidade dos veículos, não podendo assim haver influência dos veículos que circulam atrás nos que circulam à frente. Este modelo goza então da propriedade anisotrópica, ou seja, os veículos só alteram o seu comportamento com a informação do que está à sua frente.

## 5.4 Modelo de Aw-Rascle (AR)

Neste modelo Aw e Rascle (2000) [23] notam que usando uma equação de momento nos modelos pode levar a um comportamento demasiado semelhante ao dos fluidos, perdendo assim a característica anisotrópica pretendida para este tipo de problemas.

Segundo os autores a dependência da derivada espacial da pressão ( $p$ ) no modelo forma resultados irrealistas, substituindo assim por uma derivada convectiva, tentando assim simular como um condutor (em média) reagiria a uma variação de veículos em ordem à distância.

Considerando o caso em que um condutor seguindo à velocidade  $v$  nota que a concentração aumenta em ordem a  $x$ , mas diminui em ordem a  $(x - vt)$ , onde  $vt$  é o espaço percorrido em  $t$  unidades de tempo, segundo o modelo PW o condutor irá reduzir a velo-



cidade, porém à sua frente o tráfego está menos concentrado, pois a concentração diminui em ordem a  $(x - vt)$ , o que deveria resultar numa aceleração.

Assim Aw e Rascle propõem um modelo heurístico onde a seguinte equação substitui a equação da conservação linear do momento dos modelos anteriores com duas equações:

$$(v + p(k))_t + v(v + p(k))_x = 0, \quad (5.23)$$

de notar que neste modelo não se considera um termo de relaxamento ( $\tau$ ) e a função  $p(k)$  é da família  $k^\gamma$  em que  $\gamma > 0$ .

O sistema têm então o seguinte aspeto:

$$\begin{cases} k_t + (kv)_x = 0 \\ (v + p(k))_t + v(v + p(k))_x = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

De forma a ser possível escrever na forma matricial, fazem se algumas alterações nas equações, assim, multiplicando a primeira equação em (5.24) por  $p'(k)$  (primeira derivada de  $p$  em ordem a  $k$ ) obtêm-se:

$$p'(k) k_t + p'(k) k v_x + p'(k) v k_x = 0. \quad (5.25)$$

Considerando a derivada da função composta, pode se ainda escrever:

$$(p(k))_t + v(p(k))_x = -p'(k) k v_x. \quad (5.26)$$

Como os dois termos do membro esquerdo de (5.26) estão presentes na segunda equação de (5.24), a mesma pode ser escrita da forma:

$$v_t + v v_x - p'(k) k v_x = 0. \quad (5.27)$$

Rescrevendo o sistema na forma matricial  $u_t + A u_x = 0$ , a matriz  $A$  é então:

$$\begin{bmatrix} v & k \\ 0 & v - k p'(k) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Os valores próprios da matriz são:

$$\lambda_1 = v - k p'(k) \leq \lambda_2 = v, \quad (5.29)$$

pois  $p(k)$  é uma função crescente, implicando que  $-k p'(k)$  seja um termo negativo.

Como os valores próprios são reais e distintos, exceto para  $k = 0$ , o sistema é então hiperbólico, além disso, tendo em conta que  $\lambda_{1,2} \leq v$ , o modelo AR goza da propriedade anisotrópica, ou seja, a informação nunca é propagada a uma velocidade superior à dos veículos.

## 5.5 Modelo transição de fases (2 flux model)

Colombo (2003) [24] apresenta um modelo que concebe dois sistemas para o tráfego dependendo do seu estado.

Suportado pelo estudo de Kerner (2002) [25], na qual afirma que para baixas densidades de tráfego a assunção de que a velocidade pode ser determinada apenas a partir da concentração é adequada, porém o mesmo não se verifica para densidades altas.

Assim, Colombo propõem dois sistemas, definidos da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_t + (kv)_x = 0 \\ v = v_1(k) \end{array} \right. \quad (5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_t + (kv)_x = 0 \\ f_t + ((f - f_c)v)_x = 0 \\ v = v_2(k, f) \end{array} \right. \quad (5.31)$$

onde (5.30) destina-se a modelar baixas densidades de tráfego e (5.31) altas densidades,  $f_c$  é uma constante positiva determinada para se ajustar à via de circulação. Note-se que o primeiro sistema é o modelo de LWR. Para  $v_1$  Colombo considerou o modelo de Greenshields,  $v_1(k) = v_f \left(1 - \frac{k}{k_c}\right)$ , ver (3.5) e para  $v_2$  adotou a seguinte função de dois argumentos:

$$v_2(k, f) = \frac{f}{k} \left(1 - \frac{k}{k_c}\right), \quad (5.32)$$

assim a velocidade passou a ser considerada como função da concentração e do fluxo.

Para um par ordenado de concentração e fluxo,  $(k, f)$ , fazendo parte do espaço possível de concentrações e fluxos  $(\Omega)$ , ou seja,  $k \in [0, k_c]$  e  $f \in [0, f_{max}]$ , diz se fazer parte de um tráfego de baixa intensidade  $(\Omega_b)$  se:

$$\Omega_b = \left\{ (k, f) \in \Omega \mid v_1(k) \geq \hat{V}_b \wedge f = v_f k \right\}, \quad (5.33)$$

e tráfego de alta intensidade:

$$\Omega_a = \left\{ (k, f) \in \Omega \mid v_2(k, f) \leq \hat{V}_a \wedge \frac{F_1 - f_c}{k_c} \leq \frac{f - f_c}{k} \leq \frac{F_2 - f_c}{k_c} \right\}, \quad (5.34)$$

sendo que  $\hat{V}_a < \hat{V}_b \leq v_f$ , duas velocidades arbitrárias de tal forma que não existam pares  $(k, f)$  comuns aos dois conjuntos, além disso  $F_1 \in [0; f_c]$  e  $F_2 \in [f_c; +\infty[$  são parâmetros que se ajustam às condições do problema.

Sendo que o comportamento do sistema para baixa intensidade de tráfego (5.30) já foi estudado, resta então estudar o sistema para alta intensidade (5.31). Em notação matricial, reescreve-se:

$$u_t + A u_x = 0, \quad (5.35)$$

onde  $u = (k, f)$  e a matriz  $A$  é definida como:

$$\begin{bmatrix} \frac{f}{k_c} & 1 - \frac{k}{k_c} \\ (f^2 - f f_c) \left(-\frac{1}{k^2}\right) & (2f - f_c) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k_c}\right) \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

cujos valores próprios são dados por:

$$\lambda_1 = \left(\frac{2}{k_c} - \frac{1}{k}\right) (f_c - f) - \frac{f_c}{k_c}, \quad (5.37)$$

$$\lambda_2 = \frac{f}{k} \left(1 - \frac{k}{k_c}\right). \quad (5.38)$$

Observe-se que  $\lambda_2$  é igual à velocidade dos veículos, além disso, Colombo também mostra que  $\lambda_1 < \lambda_2$ , tendo isso em conta o modelo goza da propriedade anisotrópica. Assim, o modelo para um tráfego de baixa intensidade é igual ao LWR, que se mostra adequado para essa situação e também se mostra adequado para tráfegos de alta intensidade.



## Capítulo 6

# Relação do modelo GM com funções de velocidade versus densidade

Gazis (1959) [26] mostra que é possível a partir do modelo GM chegar a relações de fluxo versus concentração. Assim, lembrando o modelo GM:

$$\frac{dv_n(t + \tau)}{dt} = a \frac{[v_n(t + \tau)]^m}{[\Delta x_n(t)]^l} \Delta v_n(t), \quad (6.1)$$

onde  $m, l$  são constantes reais.

### 6.1 Modelo de Greenshields

Tomando  $l = 2$ ,  $m = 0$  e escrevendo os termos em função de  $x_n(t)$ , (6.1) toma o seguinte aspecto:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a \frac{\Delta \dot{x}_n(t)}{[\Delta x_n(t)]^2}. \quad (6.2)$$

Tomando  $\tau = 0$  e integrando em ordem a  $t$ , obtêm-se:

$$\dot{x}_n = -a \frac{1}{\Delta x_n(t)} + C, \quad (6.3)$$

onde  $C$  é uma constante de integração.

Em equilíbrio têm-se que a distância entre veículos ( $d_0$ ) é igual para todos. Assim, tem-se que:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \frac{1}{k}. \quad (6.4)$$

Como  $\dot{x}_n$  é a velocidade, (6.3) fica:

$$v = -ak + C. \quad (6.5)$$

Relembrando duas condições exigíveis para a relação velocidade versus concentração:

$$1. (v = v_f) \implies (k = 0) .$$

$$2. (v = 0) \implies (k = k_c) .$$

Tendo em conta a primeira propriedade, (6.5) fica:

$$v = -ak + v_f . \quad (6.6)$$

Usando a segunda propriedade, obtêm-se então o modelo de Greenshields (3.5):

$$v = v_f \left( 1 - \frac{k}{k_c} \right) . \quad (6.7)$$

## 6.2 Modelo de Greenberg

Tomando  $l = 1$  e  $m = 0$ , o modelo GM apresenta-se da seguinte forma:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a \frac{\Delta \dot{x}_n(t)}{\Delta x_n(t)} , \quad (6.8)$$

tomando  $\tau = 0$ , é possível rescrever a equação anterior como:

$$\ddot{x}_n(t) = a \frac{d}{dt} [\ln(\Delta x_n(t))] . \quad (6.9)$$

Em equilíbrio tem-se  $\Delta x_n(t) = \frac{1}{k}$ . Integrando em ordem a  $t$  tem-se:

$$v = a \ln \left( \frac{1}{k} \right) + C , \quad (6.10)$$

onde  $C$  é constante de integração.

Sendo que a equação anterior não está definida para  $K = 0$ , usa-se a segunda condição para obter  $C$ :

$$v = a \ln \left( \frac{k_c}{k} \right) . \quad (6.11)$$

Considerando o modelo de Greenberg, composto por ramos, de modo ao modelo poder estar definido para todas as concentrações, define-se:

$$\begin{cases} v_f, & k \leq \frac{k_c}{e} \\ v_f \ln\left(\frac{k_c}{k}\right), & k > \frac{k_c}{e} \end{cases} \quad (6.12)$$

Tendo em conta que o segundo ramo da velocidade é uma função decrescente, o máximo ( $v_f$ ) é atingido em  $\frac{k_c}{e}$ . Assim, usando este facto, substituindo em (6.11) a concentração por  $\frac{k_c}{e}$  e a velocidade por  $v_f$  (máximo da função), obtêm-se  $a = v_f$ .

Tendo em conta o valor encontrado para  $a$ , resulta então o modelo de Greenberg:

$$v = v_f \ln\left(\frac{k_c}{k}\right). \quad (6.13)$$

### 6.3 Modelo de Underwood

Tomando  $l = 2$  e  $m = 1$  o modelo GM escreve-se:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a \frac{\dot{x}_n(t + \tau)}{[\Delta x_n(t)]^2} \Delta \dot{x}_n(t). \quad (6.14)$$

tomando novamente  $\tau = 0$  e notando que  $\dot{x}_n(t)$  e  $\Delta \dot{x}_n(t)$  são respetivamente as derivadas de  $x_n(t)$  e  $\Delta x_n$ , a equação anterior pode ser rescrita como:

$$\frac{d}{dt} \ln(\dot{x}_n) = -a \frac{d}{dt} \frac{1}{\Delta x_n}. \quad (6.15)$$

Integrando em ordem a  $t$ , tem-se:

$$\ln(\dot{x}_n) = \frac{-a}{\Delta x_n} + C, \quad (6.16)$$

onde  $C$  é uma constante.

Em equilíbrio tem-se então que  $\Delta x_n = \frac{1}{k}$  e  $\dot{x}_n = v$ , resultando assim em:

$$\ln(v) = -ak + C, \quad (6.17)$$

sendo equivalente a:

$$v = \exp(-ak + C). \quad (6.18)$$

Tomando a condição  $(v = v_f) \implies (k = 0)$ , resulta  $C = \ln(v_f)$  e a equação anterior rescreve-se:

$$v = v_f \exp(-ak), \quad (6.19)$$

sendo que a função não atinge o valor zero, é necessário usar outra condição, visto que na relação do fluxo versus concentração, é exigido que exista um  $\hat{k} \in ]0, k_c]$  tal que o fluxo é máximo ( $\frac{df}{dk} = 0$ ).

Assim, multiplicando a equação anterior pela concentração, obtêm-se o fluxo no membro esquerdo de (6.19). Tomando a derivada em função da concentração, obtêm-se:

$$\frac{df}{dk} = v_f \exp(-ak) (1 - ak) \quad (6.20)$$

Como para  $\hat{k}$ , a derivada do fluxo em ordem à concentração é nula, a partir de (6.20) resulta:

$$1 - a\hat{k} = 0, \quad (6.21)$$

$$a = \frac{1}{\hat{k}}. \quad (6.22)$$

Obtendo-se assim o modelo Underwood:

$$v = v_f \exp\left(-\frac{k}{\hat{k}}\right) \quad (6.23)$$

## 6.4 Derivação de outros modelos

Rescrevendo o modelo GM da seguinte forma:

$$\frac{\ddot{x}_n(t + \tau)}{[\dot{x}_n(t + \tau)]^m} = a \frac{\Delta \dot{x}_n(t)}{[\Delta x_n(t)]^l}. \quad (6.24)$$

Ignorando  $\tau$  e integrando em ordem a  $t$ , a equação pode então ser escrita da forma:

$$G_p(\dot{x}_n(t)) = a G_p(\Delta x_n(t)) + C, \quad (6.25)$$

onde  $C$  é uma constante de integração e a função  $G_p(x)$  é definida como:

$$\begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \\ \ln(x), & p = 1 \end{cases} \quad (6.26)$$



Assumindo que o tráfego está em equilíbrio, então  $\dot{x}_n(t) = v$ ,  $\Delta x_n(t) = \frac{1}{k}$  e (6.25) pode ser escrito:

$$G_p(v) = a G_p\left(\frac{1}{k}\right) + C. \quad (6.27)$$

Tomando a função inversa de  $G_p(x)$ ,  $(G_p^{-1}(x))$ :

$$\begin{cases} [(1-p)x]^{\frac{1}{1-p}}, & p \neq 1 \\ \exp(x), & p = 1 \end{cases} \quad (6.28)$$

é possível obter um modelo da velocidade em função da concentração:

$$v = G_p^{-1}\left(a G_p\left(\frac{1}{k}\right) + C\right). \quad (6.29)$$

De referir que a relação não fica definida para quaisquer  $m$  e  $l$ .

As constantes  $a$  e  $C$  são definidas a partir das condições exigíveis para ser relação velocidade versus concentração, algumas das quais usadas na derivação dos modelos anteriormente derivados.

Para o caso  $l = 3$  e  $m = 1$ , aplicando as mesmas condições que foram usadas para obter o modelo de Underwood, obtém-se o modelo proposto por Drake:

$$v = v_f \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{k}{\hat{k}}\right)^2\right]. \quad (6.30)$$



# Capítulo 7

## Simulações e Resultados

Neste capítulo, procede-se à apresentação das simulações feitas de modo a ser possível avaliar as conclusões feitas sobre a análise de estabilidade para alguns dos modelos microscópicos.

Apesar das dinâmicas para cada modelo serem diferentes, todos eles podem ser resumidos como um problema de valor inicial (PVI) da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_n}{dt} = f(x_n, \Delta x_n, \Delta v_n) \\ x_n(0) = x_n^0 \\ v_n(0) = v_n^0 \end{array} \right. \quad (7.1)$$

por simplicidade omite-se a variável  $t$ .

De referir, que para modelos com atraso ( $\tau$ ), a dinâmica  $f$  admite mais dois argumentos  $\Delta x_n(t - \tau)$  e  $\Delta v_n(t - \tau)$ .

Todas as simulações tentam reproduzir o comportamento dos  $N$  veículos numa pista circular de comprimento  $L$ . Assim, todos os condutores têm um veículo à sua frente, responsável pelos estímulos a que o condutor vai reagir, seja diferença de posições ou velocidades.

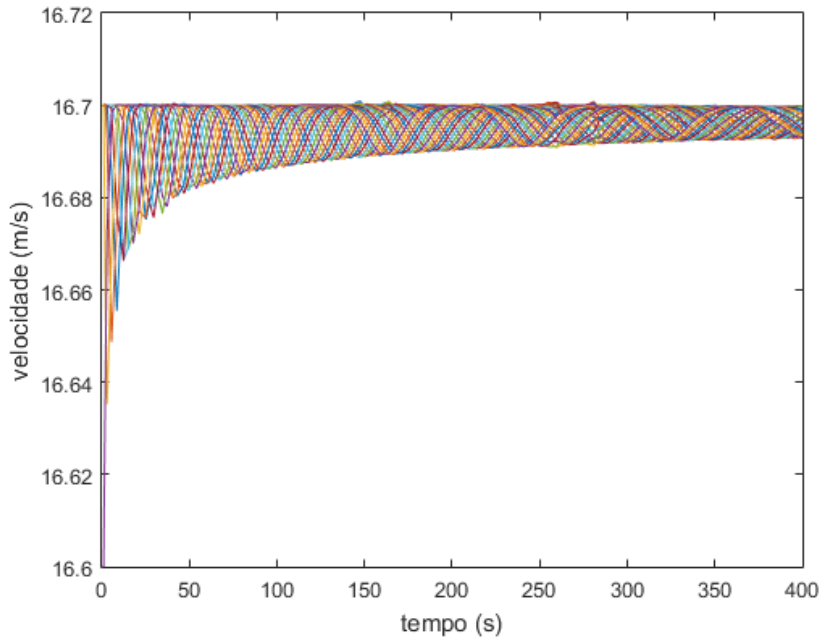
Para as simulações foram usadas duas linguagens de programação, o *Fortran* e o *Matlab*, em ambos, o integrador usado foi o método Runge-Kutta. Sendo que no *Fortran* foi usado o método de quarta ordem e no *Matlab*, usado para as dinâmicas com atraso, foi usado um método de terceira ordem.

## 7.1 Modelo GM

Para o modelo GM (2.11), a análise de estabilidade foi feita para constantes  $m$  e  $l$  nulas, tendo, neste caso, o modelo o seguinte aspeto:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a \Delta v_n(t - \tau). \quad (7.2)$$

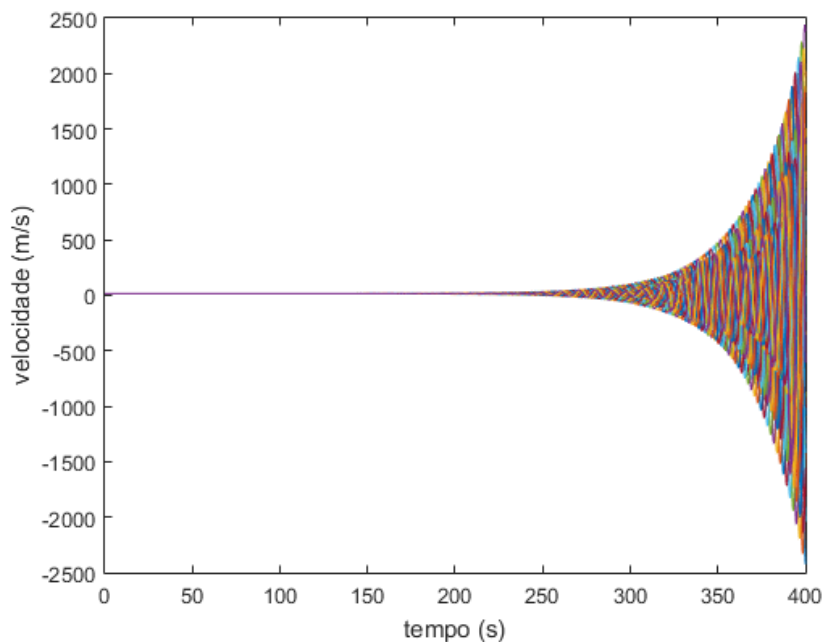
Para as simulações deste modelos foram usados  $N = 32$  veículos e  $L = 800$  metros, sendo a distância entre dois veículos consecutivos igual a 25 metros. A velocidade atribuída a cada um destes veículos foi de 16.7 m/s (aproximadamente 60 km/h) durante  $\tau$  segundos. No instante  $t = 0$ , o 32º veículo abrandou para 16.6 m/s.



**Figura 7.1:** Velocidade dos 32 veículos durante os primeiros 400 segundos para a constante de sensibilidade  $a = 0.4 \text{ s}^{-1}$ .

Observe-se nas Figuras 7.1 e 7.2 que, para o mesmo tempo de reação  $\tau = 1$  s, mas coeficientes de sensibilidade  $a$  diferentes, o perfil das velocidades de todos os veículos é bem distinto ao longo do tempo.

Note-se que a perturbação no caso  $a \tau = 0.4$  dissipa-se e o perfil das velocidades tende para valores próximos da velocidade inicial (16.7 m/s), em contraste com o caso de  $a \tau = 0.6$ , onde se atingem velocidades muito elevadas em valor absoluto. De resto, veja-se que

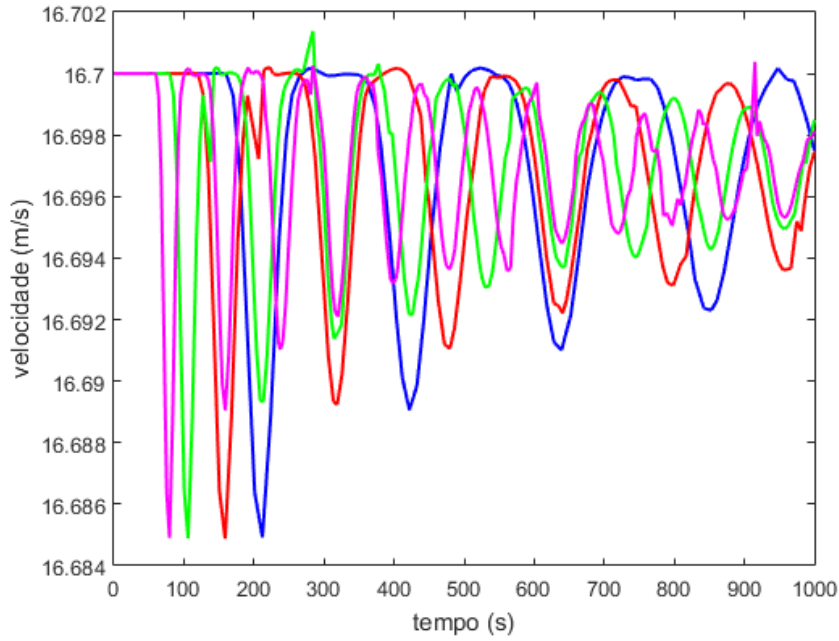


**Figura 7.2:** Velocidade dos 32 veículos durante os primeiros 400 segundos para a constante de sensibilidade  $a = 0.6 \text{ s}^{-1}$ .

são atingidas velocidades negativas, resultado que não é desejável para a simulação do tráfego de veículos.

Para todas as perturbações é expectável que uma pequena perturbação se dissipe para  $a\tau = 0.4$ , como já visto em Figura 7.1. Observa-se agora, na Figura 7.3, o efeito da perturbação para o caso de  $a\tau = 0.4$ , para diferentes valores de  $\tau \in \{1, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\}$ .

Nota-se que, quanto maior for o tempo de reação, maior será o tempo para a perturbação atingir a velocidade do veículo  $n = 1$ , ou seja, este reduzir a sua velocidade. Sendo que todas as velocidades tendem para o valor inicial  $16.7 \text{ m/s}$ , nota-se que a perturbação para valores de  $\tau$  maiores demora mais tempo a dissipar-se. Em geral, nota-se que as curvas atingem os mesmos mínimos locais. Embora quanto maior é o valor de  $\tau$ , maior é o valor de  $t$  onde o mínimo local é atingido. O tempo que a perturbação demora a dissipar-se também está relacionado com o coeficiente de sensibilidade ( $a$ ), pois, quanto maior este for, maior será a aceleração ideal adquirida para voltar à velocidade inicial.

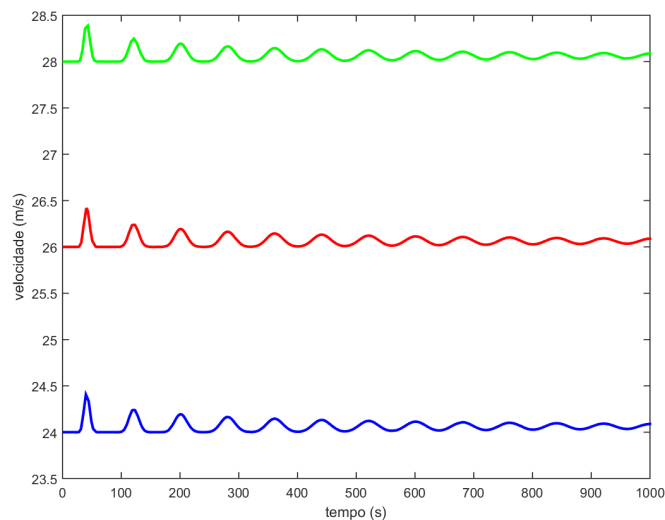


**Figura 7.3:** Velocidade do veículo  $n = 1$  nos primeiros 1000 segundos para valores de  $\tau = 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}$  representada pela linha magenta, verde, vermelho e azul, respetivamente.

De referir, observando a Figura 7.4, que a magnitude da velocidade não parece ter influência no comportamento da perturbação. Para esta figura foram feitas três simulações onde se observa a velocidade do veículo  $n = 16$  para velocidades iniciais distintas (24, 26 e 28 m/s), e perturbações iniciais semelhantes, um aumento de 2 m/s na velocidade no instante  $t = 0$ , no veículo  $n = 32$  e  $a\tau = 0.4$ . Nota-se que as três curvas são iguais a menos de uma translação no eixo das ordenadas.

Na Figura 7.5 verificam-se os efeitos para diferentes perturbações com  $a\tau = 0.4$ . Sendo que a magnitude da velocidade inicial não tem influência no comportamento da perturbação, testaram-se várias perturbações na velocidade do veículo  $n = 32$  para diferentes velocidades. As perturbações foram um aumento de velocidade de valores entre 1.5 m/s e 3.5 m/s no instante  $t = 0$ .

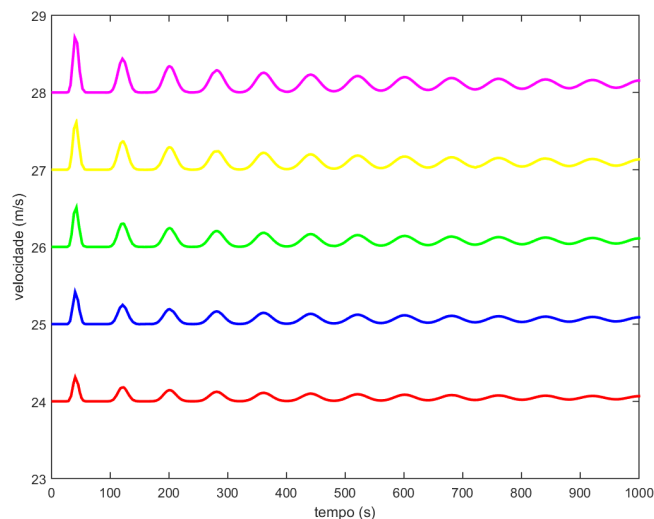
De facto, observando a Tabela (7.1) e a Figura 7.5, todas as perturbações dissipam-se, porém, quanto maior for a perturbação, maior é a diferença entre a velocidade inicial e o valor para qual está a tender a velocidade dos veículos.



**Figura 7.4:** Velocidade do veículo  $n = 16$  nos primeiros 1000 segundos para velocidades iniciais 24, 26 e 28 m/s representada pela linha azul, vermelha e verde, respetivamente.

Perturbação	1.5	2	2.5	3	3.5
$ v_o - v_{16} $	0.067	0.089	0.111	0.134	0.156

**Tabela 7.1:** Perturbação é dada em m/s e  $|v_o - v_{16}|$  é o módulo da diferença entre a velocidade inicial ( $v_o$ ) e a velocidade no tempo  $t = 1000$  s do 16º veículo ( $v_{16}$ ).



**Figura 7.5:** Velocidade do veículo  $n = 16$  nos primeiros 1000 segundos para perturbações na velocidade inicial 1.5, 2, 2.5, 3 e 3.5 m/s representada pela linha vermelha, azul, verde, amarela e magenta, respetivamente.

## 7.2 Modelo OVM

Para o modelo OVM (2.2), relembrando o seu aspeto:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = a [ V_1(\Delta x_n(t)) - v_n(t) ], \quad (7.3)$$

foram feitas simulações numéricas para 32 veículos tal como para o modelo GM ( $m = 0$ ,  $l = 0$ ). Porém, como no capítulo 2 foram determinadas condições de estabilidade para o modelo OVM relacionadas com a distância entre veículos consecutivos, o comprimento da pista circular também foi alvo de estudo.

Considerando que um condutor ao ter em conta a distância entre o veículo da frente e o seu, toma em conta a distância entre a frente do seu veículo e a parte de trás do veículo da frente, define-se a constante  $d_n$  como sendo o comprimento do veículo  $n$ . De referir que para as simulações considerou-se o comprimento de um veículo como sendo 5 m, e assim a distância entre veículos consecutivos é dada por  $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t) - 5$ .

Tomando  $a = 0.6 \text{ s}^{-1}$ , a condição de estabilidade do modelo, ou seja, a condição para a qual a perturbação é dissipada, é dada pela seguinte condição:

$$V'_1 < \frac{a}{2} = 0.3, \quad (7.4)$$

onde  $V'_1 = \left. \frac{dV_1(\Delta x)}{d\Delta x} \right|_{\Delta x = \Delta x_0}$  e  $\Delta x_0$  é a distância inicial entre veículos consecutivos.

A função de velocidade ótima,  $V_1(\cdot)$ , usada nas simulações foi a seguinte (proposta por Bando *et al.* (1998) [27]) :

$$V_1(\Delta x) = 16.8 [ \tanh(0.086(\Delta x - 25)) + 0.913 ] . \quad (7.5)$$

De referir que para baixa concentração de tráfego, ou seja,  $k \simeq 0$ , tem-se uma  $\Delta x \rightarrow \infty$ , o que resulta em  $V_1 \rightarrow 32$ . Assim, a velocidade de fluxo livre ( $v_f$ ) é 32 m/s.

Consideram-se duas pistas de comprimentos  $L_1 = 1600$  m e  $L_2 = 1280$  m, onde circulam 32 veículos uniformemente distribuídos por  $L_1/32$  metros e  $L_2/32$  metros, respectiva-



mente. Verifica-se que para uma perturbação, causada por uma redução da velocidade no veículo  $n = 32$ , o primeiro caso é estável, ou seja, a perturbação dissipa-se, pois:

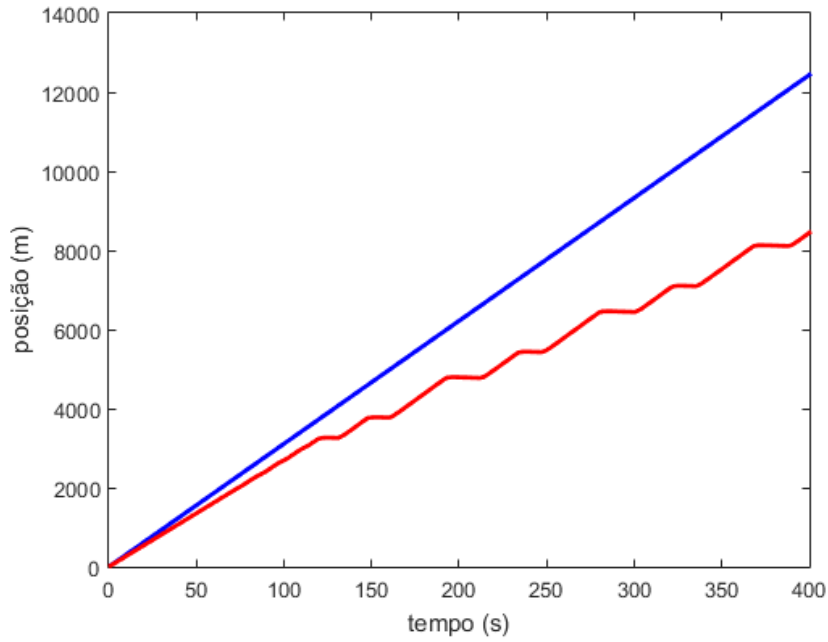
$$\Delta x_0 = L_1/32 - 5 \implies V'_1 < 0.3, \quad (7.6)$$

e para a pista  $L_2$  diz-se instável, pois:

$$\Delta x_0 = L_2/32 - 5 \implies V'_1 < 0.3. \quad (7.7)$$

resultando numa perturbação que se mantém na solução inicial.

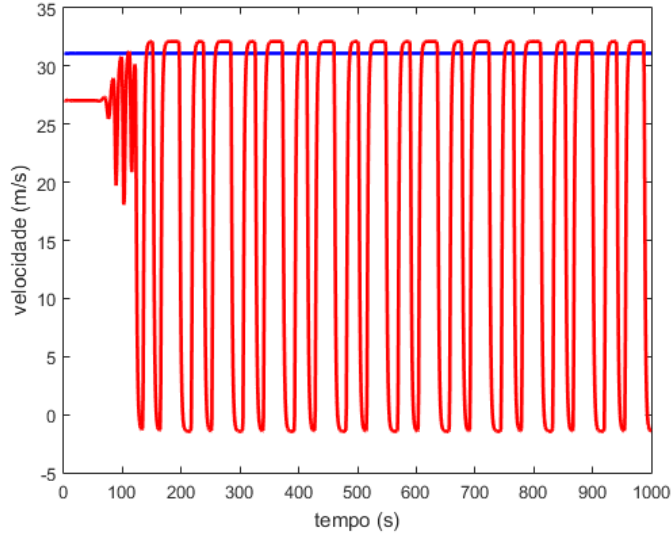
Para ambas as simulações os veículos têm velocidades iniciais iguais a  $V_1(L/N - d)$  m/s, ou seja, a velocidade ideal é função da distância ao veículo imediatamente à sua frente. Para  $n = 32$ , a velocidade inicial é dada por  $V_1(L/N - d) - 0.1$  m/s.



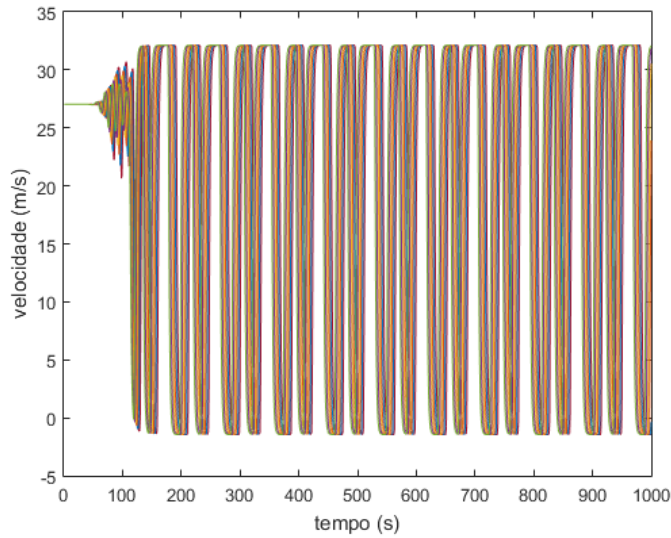
**Figura 7.6:** Posição do veículo  $n = 1$  nos primeiros 400 segundos, o caso estável e instável são descritos pelas linhas azul e vermelha, respetivamente.

Na Figura 7.6, nota-se que, no caso estável, a perturbação não afeta a velocidade do veículo  $n = 1$ ; no caso instável, é possível verificar que o veículo altera a sua velocidade um pouco depois da marca dos 100 segundos, pois o declive da posição é diferente e não volta a estabilizar a sua velocidade, ou seja, circular com a velocidade inicial e não voltar a acelerar. Na Figura 7.7 verifica-se uma aceleração nula para o caso estável e a constante

mudança de velocidade no caso instável. Na Figura 7.8 também pode ser observada a instabilidade da velocidade dos veículos.

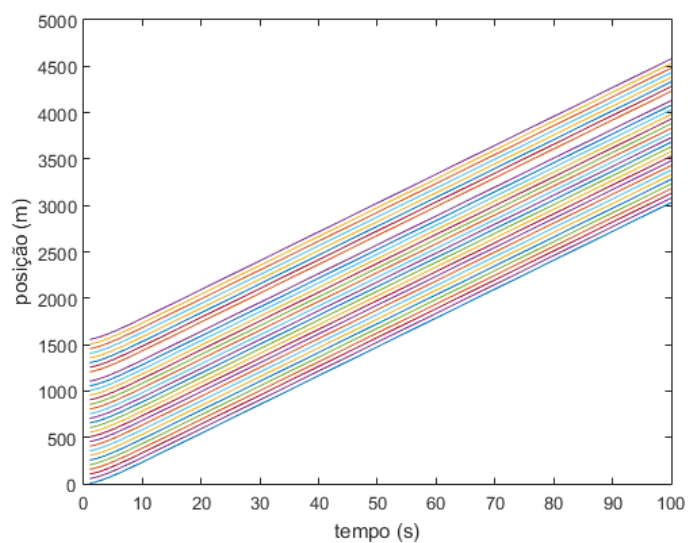


**Figura 7.7:** Velocidade do veículo  $n = 1$  nos primeiros 1000 segundos. Os casos estável e instável são descritos pelas linhas azul e vermelha, respetivamente.

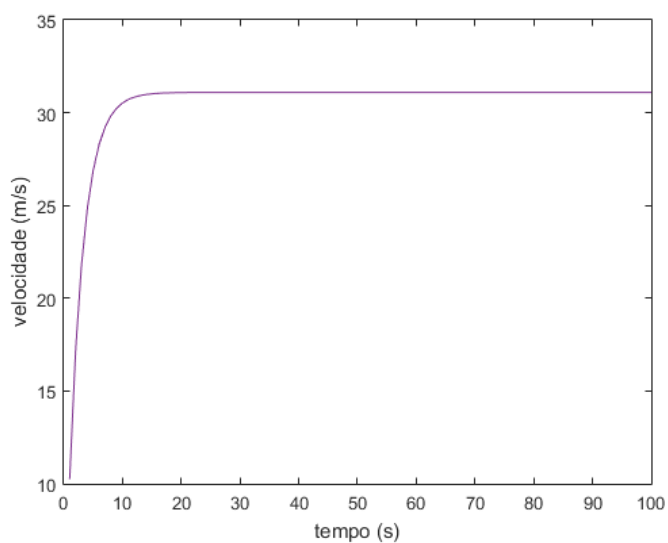


**Figura 7.8:** Velocidades dos veículos  $n = 1$  até  $n = 12$  para o caso instável.

Também é possível observar que, no caso estável,  $\Delta x_0 > 41.5$  m, garantindo assim que  $V'_1 < 0.3$  o modelo prevê que as funções da velocidade dos veículos, para qualquer velocidade inicial, tende para a velocidade ótima,  $V_1(L/N - d)$  m/s. A Figura 7.9 ilustra essa situação, para o caso de velocidade inicial ser 0 m/s. Nota-se uma aceleração nos primeiros segundos, seguida de uma velocidade constante, também observável na Figura



**Figura 7.9:** Posição dos 32 veículos nos primeiros 100 segundos para o caso estável.

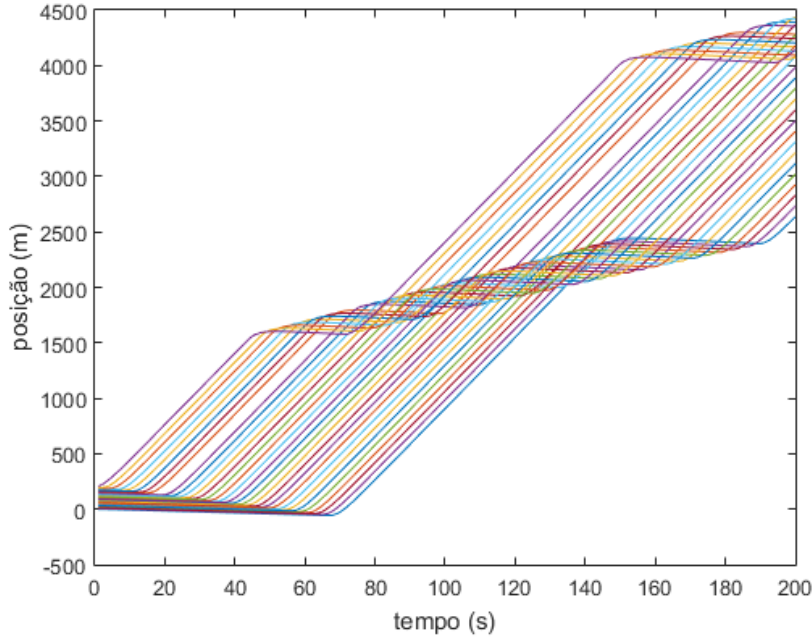


**Figura 7.10:** Velocidade dos 32 veículos nos primeiros 100 segundos para o caso estável.

7.10, onde as curvas para a velocidade são coincidentes e não existe aceleração a partir da marca dos 20 segundos.

Observa-se agora na Figura 7.11, que para uma situação onde todos os veículos estão

parados e  $\Delta x_n(0) = 1.5$  m, com exceção do veículo  $n = 32$ , que se tem  $\Delta x_{32}(0) = L - (1.5 + d) \times 31$  m, o modelo prevê algumas ultrapassagens, pois, como se pode observar, existem veículos que momentaneamente circulam com velocidade negativa.



**Figura 7.11:** Posição dos 32 veículos nos primeiros 200 segundos, para uma velocidade inicial nula.

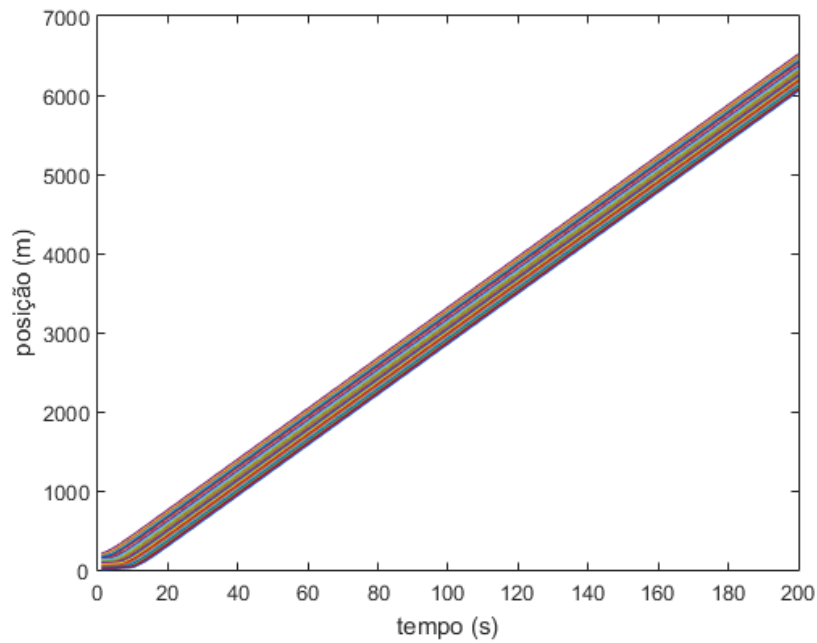
Este problema pode ser explicado pela composição da função ótima (7.5) usada, esta tem uma raiz para um argumento aproximadamente 7 m. Assim, para distâncias pequenas como no exemplo anterior representado em Figura 7.11, o modelo prevê velocidades negativas, pois  $\Delta x_n(0) < 7$  m como condição inicial.

Das funções propostas na literatura, Orosz *et al.* (2004) [28] propõem a função ótima:

$$V_1(x) = \begin{cases} 0, & \Delta x \leq 1 \\ v_f \frac{(\Delta x - 1)^3}{1 + (\Delta x - 1)^3}, & \Delta x > 1 \end{cases} \quad (7.8)$$

que melhor simula o tráfego para altas concentrações de tráfego, ou seja, veículos consecutivos muito próximos, pois não prevê velocidades negativas, mas sim, que o veículo pare o seu movimento.

Como anteriormente para a função  $V_1$  (7.5) usou-se  $v_f = 32$  m/s, também aqui foi usado este mesmo valor.



**Figura 7.12:** Posição dos 32 veículos nos primeiros 200 segundos, para uma velocidade inicial nula, simulado com função (7.8) e  $v_f = 32$  m/s.

Na Figura 7.12, nota-se que, para as mesmas condições iniciais usadas para o caso reportado na Figura 7.11, a função reproduz de forma *realista* o comportamento do tráfego. Observa-se uma grande concentração de veículos nos primeiros 10 segundos, porém os condutores vão acelerando, assim que sentem a distância do veículo dianteiro aumentar, até à velocidade ótima para uma pista de comprimento  $L_1$  com  $N$  veículos.



# Capítulo 8

## Conclusão. Trabalho futuro.

### 8.1 Considerações finais

No trabalho aqui apresentado, foram vistas duas abordagens para o estudo do tráfego de veículos: a microscópica e a macroscópica. Quanto à primeira, foram vistos modelos com e sem tempo de reação/atraso, sendo que a análise de estabilidade complexifica-se quando se tem em conta o tempo de reação/atraso. Também se verificou que a sensibilidade do condutor e tempo de reação, para alguns modelos, estão interrelacionados.

Para além de todos os modelos necessitarem de escolhas quanto aos parâmetros, observou-se que para o modelo OVM é importante a escolha da função de velocidade ótima, pois, uma função  $V_1(\cdot)$  pode adequar-se para um estado de tráfego e para outro não, como foi observado na Figura 7.11 para a função  $V_1(\cdot)$  (7.5). Para as mesmas condições iniciais, a função proposta por Orosz *et al.* (7.8) simulou o tráfego de uma forma mais *realista*. Porém, nem sempre esta pode ser a função mais adequada. Note-se que a função, para um valor de  $a = 0.6 \text{ s}^{-1}$ , prevê uma dissipação de perturbação, ou seja, um caso estável para  $\Delta x \in [0, 1.079[ \text{ m}$ , algo que não seria expectável dada a proximidade de veículos consecutivos.

O modelo OVM prevê que, para baixas densidades de tráfego, ou seja, existe uma grande distância entre veículos consecutivos, resulta em acelerações para velocidades baixa. Para altas densidades, verificam-se desacelerações para altas velocidades, sendo que, ambas as previsões do modelo são desejáveis, como exigido na relação velocidades versus densidade de tráfego referidas no Capítulo 3. Assim, o modelo, dependendo da escolha da função de velocidade ótima, parece ajustar-se bem à *realidade* do comportamento do tráfego.

Em relação ao modelo GM, para  $m = 0$  e  $l = 0$ , verificou-se uma relação entre a

constante de sensibilidade e o tempo de reação, como visto na análise de estabilidade feita no Capítulo 2. Quanto aos resultados aproximados para a estabilidade do modelo, não foi possível verificar os resultados numericamente devido às componentes da equação (2.22) que permitiram obter os critérios de estabilidade. Ainda assim, verificou-se que  $a\tau$  influência o comportamento da perturbação e quanto maior, mais rapidamente o modelo assume comportamentos (velocidade dos veículos) irrealistas.

Observa-se que o modelo GM implica diferentes relações de velocidades versus concentração, dependendo das constantes  $m$  e  $l$  usadas. Estas relações, são usadas nos modelos macroscópicos, revelando assim a importância de encontrar as constantes ( $m$  e  $l$ ) que melhor se ajustam ao tráfego.

Quanto aos modelos macroscópicos, verificou-se uma grande proximidade da teoria de fluidos na derivação das leis de conservação. Esta proximidade, refletiu-se numa semelhança de comportamento com os fluidos, nem sempre desejável para o tráfego. No modelo PW, verificou-se que a velocidade com que a informação é transmitida pode ser superior à dos veículos, sugerindo que os condutores são influenciados pelo o que está à sua retaguarda.

De notar, que para alguns destes modelos, a equação da conservação do momento linear está presente. Esta é definida através de uma força externa, representada por  $p(x, t)$ , em que em alguns modelos, é tida como função da concentração, aproximando-se da dinâmica de fluidos, não considerando assim, a não uniformidade de comportamento de condutor para condutor. Esta não uniformidade parece ser melhor captável pelos modelos microscópicos. Estes têm mais liberdade a nível de parâmetros: tanto o coeficiente de sensibilidade como o tempo de reação podem ser diferentes para cada condutor, captando assim uma grande variabilidade de comportamentos possíveis.

## 8.2 Trabalho futuro

Uma abordagem possível para o tráfego de veículos, são os modelos mesoscópicos. Estes são uma espécie de intermédio entre os modelos microscópicos e macroscópicos. A abordagem tem por base uma função de distribuição  $D(x, t, v)$ , definida da forma que,  $D(x, t, v)dx dv$  representa o número de veículos entre a posição  $x + dx$  e a circular a uma



velocidade entre  $v + dv$  no instante  $t$ .

Observa-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x, t, v) dv = k(x, t). \quad (8.1)$$

Estes modelos, estudam a evolução desta distribuição ao longo do tempo. Herman *et al.* (1972) [29] propõem que a função de distribuição obedeça a equação de Boltzmann para comportamento de gases:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + v \frac{\partial D}{\partial x} = \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_{rel} + \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_{int}. \quad (8.2)$$

O termo de relaxamento é definido:

$$\left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_{rel} = -\frac{D - D_0}{T},$$

onde  $D_0$  é a distribuição de velocidades desejadas pelos condutores e  $T$  é um tempo de reação.

Para este modelo, são feitas seguintes assunções:

1. Num encontro entre veículos, um carro ultrapassa outro com probabilidade  $P$ .
2. Se um veículo faz uma ultrapassagem, não há alterações de velocidade; caso contrário, o veículo que circula atrás reduz a sua velocidade até atingir a velocidade do veículo da sua frente.

O termo das interações, entre veículos, é dado por:

$$\left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_{int} = (1 - P) D(x, t, v) \int du (u - v) D(x, u, t).$$



# Bibliografia

- [1] Rui Jiang, Qingsong Wu, and Zuojin Zhu. Full velocity difference model for a car-following theory. *Physical Review E*, 64(1):017101, 2001.
- [2] XAGZ Zhao and Zi-you Gao. A new car-following model: full velocity and acceleration difference model. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 47(1):145–150, 2005.
- [3] Tian Jun-Fang, Jia Bin, and Li Xing-Gang. A new car following model: comprehensive optimal velocity model. *Communications in Theoretical Physics*, 55(6):1119, 2011.
- [4] Yong Zhang, Ping Ni, Minwei Li, Hao Liu, and Baocai Yin. A new car-following model considering driving characteristics and preceding vehicle’s acceleration. *Journal of advanced transportation*, 2017, 2017.
- [5] Robert E Chandler, Robert Herman, and Elliott W Montroll. Traffic dynamics: studies in car following. *Operations research*, 6(2):165–184, 1958.
- [6] Sung Bong CHUNG, Ki Han SONG, Sang Yeon HONG, and Seung Young KHO. Development of sensitivity term in car-following model considering practical driving behavior of preventing rear end collision. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 6:1354–1367, 2005.
- [7] Winifred Diana Ashton. The theory of road traffic flow. 1966.
- [8] Masako Bando, Katsuya Hasebe, Akihiro Nakayama, Akihiro Shibata, and Yuki Sugiyama. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical review E*, 51(2):1035, 1995.
- [9] Dirk Helbing and Benno Tilch. Generalized force model of traffic dynamics. *Physical review E*, 58(1):133, 1998.

- [10] Robert Herman, Elliott W Montroll, Renfrey B Potts, and Richard W Rothery. Traffic dynamics: analysis of stability in car following. *Operations research*, 7(1):86–106, 1959.
- [11] Leslie C Edie. Car-following and steady-state theory for noncongested traffic. *Operations research*, 9(1):66–76, 1961.
- [12] Denos C Gazis, Robert Herman, and Richard W Rothery. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations research*, 9(4):545–567, 1961.
- [13] Michael James Lighthill and Gerald Beresford Whitham. On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178):317–345, 1955.
- [14] NB Taylor, S Notley, N Bourne, and George Skrobanski. Evidence for speed-flow relationships. In *Proc. European transport conference, Leeuwenhorst*, pages 6–8, 2008.
- [15] Harold Greenberg. An analysis of traffic flow. *Operations research*, 7(1):79–85, 1959.
- [16] Louis Albert Pipes. Car following models and the fundamental diagram of road traffic. *Transportation Research/UK/*, 1966.
- [17] JL Drake and Joseph L Schofer. A statistical analysis of speed-density hypotheses. *Highway Research Record 154*, pages 53–87, 1966.
- [18] Paul I Richards. Shock waves on the highway. *Operations research*, 4(1):42–51, 1956.
- [19] Harold J Payne. Model of freeway traffic and control. *Mathematical Model of Public System*, pages 51–61, 1971.
- [20] GB Whitham. Linear and nonlinear waves. 1974 john wiley & sons. Inc. New York, 1974.
- [21] Steven Schochet. The instant-response limit in whitham’s nonlinear traffic-flow model: Uniform well-posedness and global existence. *Asymptotic Analysis*, 1(4):263–282, 1988.
- [22] H Michael Zhang. A theory of nonequilibrium traffic flow. *Transportation Research Part B: Methodological*, 32(7):485–498, 1998.

- [23] AATM Aw and Michel Rascle. Resurrection of "second order" models of traffic flow. *SIAM journal on applied mathematics*, 60(3):916–938, 2000.
- [24] Rinaldo M Colombo. Hyperbolic phase transitions in traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(2):708–721, 2003.
- [25] BS Kerner. Synchronized flow as a new traffic phase and related problems for traffic flow modelling. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(5-6):481–508, 2002.
- [26] Denos C Gazis, Robert Herman, and Renfrey B Potts. Car-following theory of steady-state traffic flow. *Operations research*, 7(4):499–505, 1959.
- [27] Masako Bando, Katsuya Hasebe, Ken Nakanishi, and Akihiro Nakayama. Analysis of optimal velocity model with explicit delay. *Physical Review E*, 58(5):5429, 1998.
- [28] Gábor Orosz, R Eddie Wilson, and Bernd Krauskopf. Global bifurcation investigation of an optimal velocity traffic model with driver reaction time. *Physical Review E*, 70(2):026207, 2004.
- [29] Robert Herman, Tenny Lam, and Ilya Prigogine. Kinetic theory of vehicular traffic: Comparison with data. *Transportation science*, 6(4):440–452, 1972.



# Apêndices





Código usado para a linguagem *Matlab*.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Codigo para Figura 7.3

function GMcomatraso
tau = 1;

sol1 = dde23(@ddex1de,tau,@ddex1hist1,[0 , 1000]);

sol2 = dde23(@ddex1de,tau,@ddex1hist2,[0 , 1000]);

sol3 = dde23(@ddex1de,tau,@ddex1hist3,[0 , 1000]);

sol4 = dde23(@ddex1de,tau,@ddex1hist4,[0 , 1000]);

sol5 = dde23(@ddex1de,tau,@ddex1hist5,[0 , 1000]);

figure;
plot(sol1.x,sol1.y(48,:), 'b', 'LineWidth',2)
hold on
plot(sol2.x,sol2.y(48,:), 'r', 'LineWidth',2)
hold on
plot(sol3.x,sol3.y(48,:), 'g', 'LineWidth',2)
hold on
plot(sol4.x,sol4.y(48,:), 'm', 'LineWidth',2)
hold on
plot(sol5.x,sol5.y(48,:), 'y', 'LineWidth',2)
title('');
xlabel('tempo_(s)');
ylabel('velocidade_(m/s)');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Diferentes conidcoes iniciais e pertrubacoes
```

%%%

```
function s = ddex1hist1(t)
if t==0           %Tempo onde aconetece perturbacao
    for i = 1:31
        s(i) = 25*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 25;
    end
    s(32) = 25*t + 31*25;
    s(64) = 27;
else
    for i = 1:32
        s(i) = 25*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 25;
    end
end

end
```

```
function s = ddex1hist2(t)

if t==0           %Tempo onde aconetece perturbacao
    for i = 1:31
        s(i) = 24*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 24;
    end
    s(32) = 24*t + 31*25;
    s(64) = 25.5;
else
    for i = 1:32
        s(i) = 24*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 24;
    end
end

end
```

```

function s = ddex1hist3(t)

if t==0           %Tempo onde aconetece perturbacao
    for i = 1:31
        s(i) = 26*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 26;
    end
        s(32) = 26*t + 31*25;
        s(64) = 28.5;
else
    for i = 1:32
        s(i) = 26*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 26;
    end
end

function s = ddex1hist4(t)
if t==0           %Tempo onde aconetece perturbacao
    for i = 1:31
        s(i) = 28*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 28;
    end
        s(32) = 28*t + 31*25;
        s(64) = 31.5;
else
    for i = 1:32
        s(i) = 28*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 28;
    end
end

function s = ddex1hist5(t)
if t==0           %Tempo onde aconetece perturbacao
    for i = 1:31

```

```

        s(i) = 27*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 27;
    end

    s(32) = 27*t + 31*25;
    s(64) = 30;

else
    for i = 1:32
        s(i) = 27*t + (i-1)*25;
        s(i+32) = 27;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Dinamica OVM para a = 0.4 com atraso
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function dydt = ddex1de(t,y,Z)
a = 0.4;

for j = 1:32 %Historico y(t-tau)
    ylag(j) = Z(32+j);
end

for i = 1:31
    dydt(i) = y(i+32);
    dydt(i+32) = a*(ylag(i+1) - ylag(i));
end

dydt(32) = y(64);
dydt(64) = a*(ylag(1)-ylag(32));

dydt=dydt.';

```

Código usado para a linguagem *Fortran*.

```
program modelo_ovm_covm

    implicit none
    integer :: nmax
    real*8   :: dt, a, k, lamb, L, tmax, tsnap, d
    parameter (dt=5.d-4, nmax=32, L=1600.d0, tmax=200.d0, tsnap=1d0, d=5.d-4)
    parameter (a=.4d0, k=0.41d0, lamb=0.5d0)
    real*8   :: x(nmax), y(nmax)

    !!!!! rotina = 1 para ovm, rotina = 2 para covm

    integer, parameter :: rotina = 1

    !!!!! condicoes iniciais
    call initial_condition(L, nmax, x, y, d)

    call corrida(x, y, dt, a, k, lamb, L, tmax, nmax, tsnap, rotina, d)

end program modelo_ovm_covm

!-----

subroutine initial_condition(L, nmax, x0, y0, d)

    implicit none
    integer :: nmax, n
    real*8   :: L, x0(nmax), y0(nmax), V, d

    do n = 1, nmax-1
        x0(n) = (n-1)*(d + 1.5d0)
        y0(n) = 0d0
    end do
```

```
x0(nmax) = (nmax-1)*(d + 1.5d0)
y0(nmax) = 0d0
```

```
return
end subroutine initial_condition
```

---

```
subroutine corrida(x, y, dt, a, k, lamb, L, tmax, nmax, tsnap, rotina, d)
```

```
implicit none
```

```
integer :: nmax, n, itemax, itesnap, rotina, iter, j
```

```
real*8 :: x(nmax), y(nmax), dt, a, k, lamb, L, tmax, tsnap, d, delx(nmax)
```

```
itemax = tmax/dt + 1.d-14
```

```
itesnap = tsnap/dt + 1.d-14
```

```
Open(1, file='ba_e_1.dat')
```

```
Open(2, file='ba_e_2.dat')
```

```
Open(3, file='ba_e_3.dat')
```

```
Open(4, file='ba_e_4.dat')
```

```
Open(5, file='ba_e_5.dat')
```

```
Open(6, file='ba_e_6.dat')
```

```
Open(7, file='ba_e_7.dat')
```

```
Open(8, file='ba_e_8.dat')
```

```
Open(9, file='ba_e_9.dat')
```

```
Open(10, file='ba_e_10.dat')
```

```
Open(11, file='ba_e_11.dat')
```

```
Open(12, file='ba_v_12.dat')
```

```
Open(13, file='ba_v_13.dat')
```

```
Open(14, file='ba_v_14.dat')
```

```
Open(15, file='ba_v_15.dat')
```

```
Open(16, file='ba_v_16.dat')
```

```

Open(17, file='ba_v_17.dat')
Open(18, file='ba_v_18.dat')
Open(19, file='ba_v_19.dat')
Open(20, file='ba_v_20.dat')
Open(21, file='ba_v_21.dat')
Open(22, file='ba_v_22.dat')

```

```

Do n = 1, itemax

```

```

    call next_time_step_rk4(x, y, dt, a, k, lamb, L, nmax, rotina, d)

```

```

    if ( MOD(n, itesnap) == 0 ) then

```

```

        WRITE(1,*)    n/itesnap, x(1) , x(2) , x(3)
        WRITE(2,*)    n/itesnap, x(4) , x(5) , x(6)
        WRITE(3,*)    n/itesnap, x(7) , x(8) , x(9)
        WRITE(4,*)    n/itesnap, x(10), x(11), x(12)
        WRITE(5,*)    n/itesnap, x(13), x(14), x(15)
        WRITE(6,*)    n/itesnap, x(16), x(17), x(18)
        WRITE(7,*)    n/itesnap, x(19), x(20), x(21)
        WRITE(8,*)    n/itesnap, x(22), x(23), x(26)
        WRITE(9,*)    n/itesnap, x(25), x(26), x(27)
        WRITE(10,*)   n/itesnap, x(28), x(29), x(30)
        WRITE(11,*)   n/itesnap, x(31), x(32)

```

```

        WRITE(12,*)   n/itesnap, y(1) , y(2) , y(3)
        WRITE(13,*)   n/itesnap, y(4) , y(5) , y(6)
        WRITE(14,*)   n/itesnap, y(7) , y(8) , y(9)
        WRITE(15,*)   n/itesnap, y(10), y(11), y(12)
        WRITE(16,*)   n/itesnap, y(13), y(14), y(15)
        WRITE(17,*)   n/itesnap, y(16), y(17), y(18)

```

```

WRITE(18,*)      n/itesnap , y(19) , y(20) , y(21)
WRITE(19,*)      n/itesnap , y(22) , y(23) , y(24)
WRITE(20,*)      n/itesnap , y(25) , y(26) , y(27)
WRITE(21,*)      n/itesnap , y(28) , y(29) , y(30)
WRITE(22,*)      n/itesnap , y(31) , y(32)

```

```

  end if

```

```

end do

```

```

close(1)
close(2)
close(3)
close(4)
close(5)
close(6)
close(7)
close(8)
close(9)
close(10)
close(11)

```

```

close(12)
close(13)
close(14)
close(15)
close(16)
close(17)
close(18)
close(19)
close(20)
close(21)
close(22)

```



```

return
end subroutine corrida

```

!

---

```

subroutine next_time_step_rk4(x, y, dt, a, k, lamb, L, nmax, rotina, d)

```

```

    implicit none

```

```

    integer :: nmax, rotina

```

```

    real*8 :: x(nmax), y(nmax), dt, a, k, lamb, L, d

```

```

    real*8 :: k1x(nmax), k2x(nmax), k3x(nmax), k4x(nmax)

```

```

    real*8 :: k1y(nmax), k2y(nmax), k3y(nmax), k4y(nmax)

```

```

    if (rotina == 1) then

```

```

        call ovm(x, y, a, L, k1x, k1y, nmax, d)

```

```

        k1x = dt * k1x; k1y = dt * k1y

```

```

        call ovm(x + 0.5d0*k1x, y + 0.5d0*k1y, a, L, k2x, k2y, nmax, d)

```

```

        k2x = dt * k2x; k2y = dt * k2y

```

```

        call ovm(x + 0.5d0*k2x, y + 0.5d0*k2y, a, L, k3x, k3y, nmax, d)

```

```

        k3x = dt * k3x; k3y = dt * k3y

```

```

        call ovm(x + k3x, y + k3y, a, L, k4x, k4y, nmax, d)

```

```

        k4x = dt * k4x; k4y = dt * k4y

```

```

        x = x + (k1x + k4x)/6.d0 + (k2x + k3x)/3.d0

```

```

        y = y + (k1y + k4y)/6.d0 + (k2y + k3y)/3.d0

```

```

    else

```

```

        call covm(x, y, k, lamb, L, k1x, k1y, nmax)

```

```
k1x = dt * k1x; k1y = dt * k1y
```

```
call covm(x + 0.5d0*k1x, y + 0.5d0*k1y, k, lamb, L, k2x, k2y, nmax)
```

```
k2x = dt * k2x; k2y = dt * k2y
```

```
call covm(x + 0.5d0*k2x, y + 0.5d0*k2y, k, lamb, L, k3x, k3y, nmax)
```

```
k3x = dt * k3x; k3y = dt * k3y
```

```
call covm(x + k3x, y + k3y, k, lamb, L, k4x, k4y, nmax)
```

```
k4x = dt * k4x; k4y = dt * k4y
```

```
x = x + (k1x + k4x)/6.d0 + (k2x + k3x)/3.d0
```

```
y = y + (k1y + k4y)/6.d0 + (k2y + k3y)/3.d0
```

```
end if
```

```
return
```

```
end subroutine next_time_step_rk4
```

---

```
subroutine ovm(x, y, a, L, xdot, ydot, nmax, d)
```

```
implicit none
```

```
integer :: nmax, n
```

```
real*8 :: x(nmax), y(nmax), xdot(nmax), ydot(nmax), V, a, L, d
```

```
xdot = y
```

```
do n = 1, nmax - 1
```

```
    ydot(n) = a * ( V(x(n+1)-x(n)-d) - y(n) )
```

```
end do
```

```
ydot(nmax) = a * ( V(x(1)-x(nmax)+L-d) - y(nmax) )
```

```

    return
end subroutine ovm

```

!

---

```

real*8 function V(x)

```

```

    implicit none

```

```

    real*8    :: x

```

```

    !!!!! Funcao proposta por Orosz

```

```

    if ( x < 1) then

```

```

        v = 0

```

```

    else

```

```

        v = 32*((x - 1d0)**3/(1+(x-1d0)**3))

```

```

    end if

```

```

    !V = 16.8d0*(dtanh(0.086d0*(x-25d0)) + 0.913d0)

```

```

    return

```

```

end function V

```

!

---

```

subroutine covm(x, y, k, lamb, L, xdot, ydot, nmax)

```

```

    implicit none

```

```

    integer :: nmax, n

```

```

    real*8   :: x(nmax), y(nmax), xdot(nmax), ydot(nmax), V1, V2, lamb, k,

```

```

    xdot = y

```

```

do n = 1, nmax - 1
    ydot(n) = k * ( V1(x(n+1)-x(n)) - y(n) ) + lamb * V2(y(n+1)-y(n))
end do
ydot(nmax) = k * ( V1(x(1)-x(nmax)+L) - y(nmax) ) + lamb * V2(y(1)-y(nmax))

return
end subroutine covm

```

!\_\_\_\_\_

```

real*8 function V1(x)

```

```

    implicit none

```

```

    real*8    :: x

```

```

    real*8    :: a1, a2, a3, a4, a5, a3a4a5

```

```

    parameter (a1=6.75d0 ,a2=7.91d0 ,a3=0.13d0 , a4=0.d0 , a5=1.57d0 )

```

```

    parameter (a3a4a5 = -a3*a4+a5)

```

```

    V1 = a1 + a2 * dtanh( a3 * x + a3a4a5 )

```

```

    return

```

```

end function V1

```

!\_\_\_\_\_

```

real*8 function V2(x)

```

```

    implicit none

```

```

    real*8    :: x

```

```

    real*8    :: b1, b2

```

```

    parameter (b1=6.d0 ,b2=0.35d0)

```

```

    V2 = b1 * dtanh( b2*x )

```

```
    return  
end function V2
```

!

---